

Sujet de révision N°2

EXERCICE 1 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit l'équation (E) : $z^3 = i(z-1)^3$.

1) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $iz^2 - (2+i)z + 1 = 0$.

b) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $z^3 + [i(z-1)]^3 = 0$.

c) Dédire les solutions de (E) sous forme algébrique.

2) a) Montrer que si z est une solution de (E) alors $|z| = |z-1|$.

b) Déterminer alors l'équation cartésienne de l'ensemble (D) des points M d'affixes z tels que $|z| = |z-1|$.

3) Soit M un point d'affixe z .

a) Montrer que M appartient à (D) si et seulement si $z-1 = -\bar{z}$.

b) En déduire la relation : $\arg(z) + \arg(z-1) \equiv \pi [2\pi]$.

4) On prend $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Exprimer r en fonction de θ .

5) a) Déterminer les valeurs de θ pour que z soit solution de (E).

b) Utiliser ce qui précède pour déterminer les solutions de l'équation (E).

c) Dédire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2 :

Le plan est orienté. On considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que $AB \neq AD$;

$(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $(\overline{DA}, \overline{DB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct.

1- a) Montrer que $AB = ED$

b) En déduire qu'il existe une rotation r tel que $r(A) = E$ et $r(B) = D$. Préciser son angle

θ et construire son centre I



2- La droite (EC) coupe (AB) en F

a) Montrer que triangle AEF est équilatéral et que $r(F) = A$

b) En déduire que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF

3- Soit r' la rotation de centre c et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Trouver $r'(F)$ et $r'(D)$ et en déduire que les droites (FD) et (BE) se coupe en J et que $(\overline{JD}, \overline{JB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

4- Soit Γ le cercle de centre Ω circonscrit au triangle ABD

a) Montrer que Γ passe par I et J

b) Montrer que I, O et Ω sont alignés sur une droite Δ

5- a) Caractériser le déplacement f tel que $f(B)=A$ et $f(C)=D$

b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement σ tel que $\sigma(C)=D$ et $\sigma(B)=A$.

Donner les éléments caractéristiques de σ

6- Soit $S = \sigma \circ S_{(BD)}$

a) Donner la nature de S

b) Donner les éléments caractéristiques de S

EXERCICE 3 :

Partie A :

1) Soit p un entier naturel non nul et m un entier naturel impair.

Vérifier que $p \equiv -1 \pmod{(1+p)}$ puis montrer que $1+p$ divise $1+p^m$.

2) Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant un raisonnement par l'absurde montrer les deux propositions suivantes :

a) Si $1+a^n$ est un nombre premier alors a est pair.

b) Si $1+a^n$ est un nombre premier alors n est une puissance de 2 (On posera $n = 2^\alpha \times q$ où α un entier naturel et q est un entier naturel impair différent de 1).

3) Les nombres $1+2019^{32}$ et $1+2020^{12}$ sont-ils premiers (Justifier la réponse).

Partie B :

1) On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres entiers par $u_n = 1+6^{2^n}$.

a) Vérifier que $u_3 \equiv 0 \pmod{17}$.

b) Soit n et k deux entiers naturels avec $k \geq 1$. Vérifier que $u_{n+k} - 1 = (u_n - 1)^{2^k}$.

c) En déduire que $u_{n+k} \equiv 2 \pmod{u_n}$.

d) Prouver que deux termes distincts de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ sont premiers entre eux.

2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, le chiffre des unités de u_n est égal à 7.

3) Les entiers u_n sont-ils tous premiers ?

EXERCICE 4 :

A) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = x e^{-\frac{n}{x}}$, si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$. On note (C_n) la représentation graphique de f_n dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que f_n est continue et dérivable à droite en 0.

- 2) Montrer que f_n est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer $f_n'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_n(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n .
- 4) Montrer que la droite $D_n: y = x - n$ est une asymptote à (C_n) .
- 5) Construire (C_1) et (C_2) .

6) Pour $x > 0$, on pose : $F_1(x) = \int_1^x f_1(t) dt$.

a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $F_1(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} \int_1^x e^{-\frac{1}{t}} dt$.

b) En déduire que pour $x \geq 1$ on a : $F_1(x) \geq \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x}} (x^2 - x + 1) - \frac{1}{2e}$.

B)

- 1) Montrer qu'il existe un réel unique a_n tel que : $f_n(a_n) = 1$.
- 2) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n > 1$ et que : $a_n \ln(a_n) = n$.
- 3) Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln x$.
 - a) Montrer que g est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.
 - c) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
 - d) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(a_n) + \ln(\ln(a_n)) = \ln(n)$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a_n)}{n} = 0$.

e) Montrer que $f_n(a_{n+1}) = e^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.

C) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n(t) dt$, J_n la valeur moyenne de f_n sur $[a_n; a_{n+1}]$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^n I_k.$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq J_n \leq e^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.
- 2) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- 3) Pour $x > 0$, on pose $F_n(x) = \int_1^{\frac{x}{n}} f_n(t) dt$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Montrer que F_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $F_n'(x) = f_1\left(\frac{x}{n^2}\right)$.
 - b) En déduire que pour tout $x > 0$: $F_n(x) = n^2 F_1\left(\frac{x}{n^2}\right) - n^2 F_1\left(\frac{1}{n}\right)$.
 - c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$.