

# Droites et plans de l'espace

## Droites de l'espace

- Soient  $A$  un point de l'espace et  $\vec{u}$  un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par  $A$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  soient colinéaires.
- Si  $\mathcal{D}$  est une droite de vecteur directeur  $\vec{u} (\neq \vec{0})$  et  $\mathcal{D}'$  est une droite de vecteur directeur  $\vec{u}' (\neq \vec{0})$  :
  - $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires.
  - $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont orthogonales si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont orthogonaux.

## Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soient  $A(x_A, y_A, z_A)$  un point de l'espace et  $\vec{u}(a, b, c)$  un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par  $A$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, l'ensemble des points de l'espace de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \\ z = \gamma + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  où l'un au moins des trois réels  $a, b$  ou  $c$  est non nul est la droite passant par le point  $A(\alpha, \beta, \gamma)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(a, b, c)$ .

## Plans de l'espace

### Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

- Un **vecteur normal** à un plan  $\mathcal{P}$  est un vecteur **non nul** orthogonal à toute droite de  $\mathcal{P}$ . Deux vecteurs normaux à un même plan  $\mathcal{P}$  sont colinéaires.
- Soient  $A$  un point de l'espace et  $\vec{n}$  un vecteur non nul de l'espace. Le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

- Si dans un repère orthonormal le point  $A$  a pour coordonnées  $(x_A, y_A, z_A)$  et le vecteur  $\vec{n}$  a pour coordonnées  $(a, b, c)$  (l'un des trois réels  $a, b$  ou  $c$  n'étant pas nul), une équation cartésienne du plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

- Dans un repère orthonormal, tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  où l'un des trois réels  $a, b$  ou  $c$  n'est pas nul. Réciproquement, l'ensemble d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  où l'un des trois réels  $a, b$  ou  $c$  n'est pas nul est un plan de vecteur normal  $\vec{n}(a, b, c)$ .

### Parallélisme et perpendicularité de deux plans ou d'un plan et d'une droite

$\mathcal{P}$  est un plan de vecteur normal  $\vec{n}$  et  $\mathcal{P}'$  est un plan de vecteur normal  $\vec{n}'$ .

- $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles si et seulement si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires.
- $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont perpendiculaires si et seulement si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux.

$\mathcal{D}$  est un plan de vecteur normal  $\vec{n}$  et  $\mathcal{D}$  est une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

- $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  sont parallèles si et seulement si  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux.
  - $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  sont perpendiculaires si et seulement si  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires.
- $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  sont perpendiculaires si et seulement si  $\vec{u}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $\mathcal{P}$ .  
Dans ce cas,  $\mathcal{D}$  est orthogonale à toute droite contenue dans  $\mathcal{P}$ .

### Distance d'un point à un plan


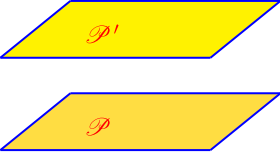
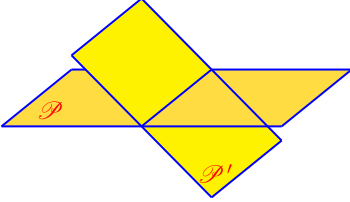
Soient  $\mathcal{P}$  un plan et  $M_0$  un point. La distance de  $M_0$  au plan  $\mathcal{P}$  est la distance de  $M_0$  au projeté orthogonal  $H$  du point  $M_0$  sur le plan  $\mathcal{P}$ . Cette distance est la plus courte distance de  $M_0$  à un point quelconque de  $\mathcal{P}$ .

Si dans un repère orthonormal le plan  $\mathcal{P}$  a pour équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$  (l'un des trois réels  $a, b$  ou  $c$  n'étant pas nul) et  $M_0$  a pour coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  alors la distance de  $M_0$  à  $\mathcal{P}$  est

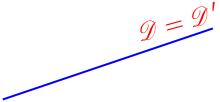
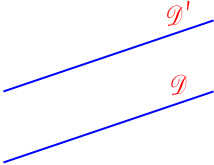
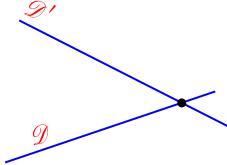
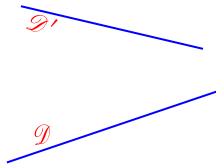
$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

# Positions relatives de droites et de plans

## Deux plans

| Plans parallèles  |   | Plans non parallèles  |
|---|---|---|
| confondus   | strictement parallèles  | sécants en une droite   |
|  |  |  |


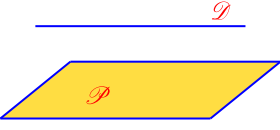
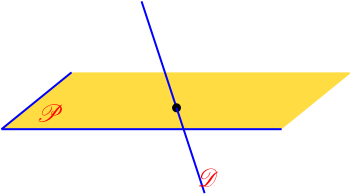
## Deux droites

| Droites parallèles  |   | Droites non parallèles   |   |
|---|---|--|---|
| confondues  | strictement parallèles  | sécantes   | non coplanaires   |
|  |  |  |  |
| coplanaires   |   |  | non coplanaires   |

En particulier,

- si  $D$  et  $D'$  n'ont aucun point en commun,  $D$  et  $D'$  peuvent être strictement parallèles ou non coplanaires,
- si  $D$  et  $D'$  ne sont pas parallèles,  $D$  et  $D'$  peuvent être sécantes ou non coplanaires.

## Une droite et un plan

| Plans et droites parallèles   |   | Plans et droites non parallèles   |
|---|---|---|
| droite incluse  | strictement parallèles  | sécants en un point   |
|  |  |  |

Dans cette fiche, on n'a pas rappelé la notion de demi-espace ( $ax + by + cz + d > 0$ ) ni les positions relatives de trois plans de l'espace.