Résolutions d'équations

Equations générales

$$\mathbf{A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0}$$

Exemple 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
Exemple 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{2x} = e^x \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ ou $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Exemple 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(2x) - \sin(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x)(2\cos(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = \frac{1}{2}\dots$
Exemple 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. $z^2 = 3iz \Leftrightarrow z(z - 3i) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 3i$.

$$\mathbf{\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B \neq 0 \qquad \frac{A}{B} = 1 \Leftrightarrow A = B \text{ et } B \neq 0}$$

Exemple 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^6 - x - 62} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^6 - x - 62} = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2)$ et $x^6 - x - 62 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Exemple 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 - 4x + 3$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0$. $\mathscr{S} = \varnothing$.

$$\mathbf{A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B \text{ ou } A = -B \qquad \text{Pour A et B réels, } A^3 = B^3 \Leftrightarrow A = B}$$

Exemple 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x-1)^2 = (2x+3)^2 \Leftrightarrow x - 1 = 2x + 3$ ou $x - 1 = -2x - 3 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = -\frac{2}{3}$.
Exemple 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x-1)^3 = (2x+3)^3 \Leftrightarrow x - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = -4$.

$$\mathbf{\text{Pour A et B réels, } \sqrt{B} = A \Leftrightarrow B = A^2 \text{ et } B \geq 0}$$

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{x+3} = x + 1 \Leftrightarrow x + 3 = (x+1)^2$ et $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ et $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x = 1$ ou $x = -2)$ et $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Equations algébriques

Pour x réel et a réel positif, $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Exemple 1. L'équation $x^2 + 8 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Exemple 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Pour tous réels x et a, $x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}$

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow x = -2$.

Equations avec exponentielles et logarithmes

Pour tous réels x et y, $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
Pour tout réel x et tout réel strictement positif a, $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$
Si $a \leq 0$, l'équation $e^x = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Exemple 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{x+3} = e^{-x-7} \Leftrightarrow x + 3 = -x - 7 \Leftrightarrow x = -5$.
Exemple 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{x+3} = 2 \Leftrightarrow x + 3 = \ln(2) \Leftrightarrow x = -3 + \ln(2)$.
Exemple 3. Les équations $e^x = -1$ et $e^x = 0$ n'ont pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Pour tous réels A et B, $\ln(A) = \ln(B) \Leftrightarrow A = B$ et $A > 0$
Pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
Pour tout réel strictement positif x et tout réel a, $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$

Exemple 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x+3) = \ln(-x-7) \Leftrightarrow x + 3 = -x - 7$ et $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x = -5$ et $x + 3 > 0$. $\mathscr{S} = \varnothing$.
Exemple 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x+3) = 2 \Leftrightarrow x + 3 = e^2 \Leftrightarrow x = -3 + e^2$.

Equations trigonométriques

$$\cos(\mathbf{a}) = \cos(\mathbf{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{il existe } \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \textbf{ tel que } \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{2k\pi} \\ \textbf{ou} \\ \textbf{il existe } \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \textbf{ tel que } \mathbf{b} = -\mathbf{a} + \mathbf{2k\pi} \end{cases}$$

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin(\mathbf{a}) = \sin(\mathbf{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{il existe } \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \textbf{ tel que } \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{2k\pi} \\ \textbf{ou} \\ \textbf{il existe } \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \textbf{ tel que } \mathbf{b} = \pi - \mathbf{a} + \mathbf{2k\pi} \end{cases}$$

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) - \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x) \Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi$ ou $2x = \pi - x + 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$.

Si a n'est pas de la forme $\frac{\pi}{\mathbf{2}} + \mathbf{K}\pi,\ \mathbf{K} \in \mathbb{Z}$, $\tan(\mathbf{a}) = \tan(\mathbf{b}) \Leftrightarrow$ **il existe** $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}$ **tel que** $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{k}\pi$

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\tan(x) = 1 \Leftrightarrow \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.