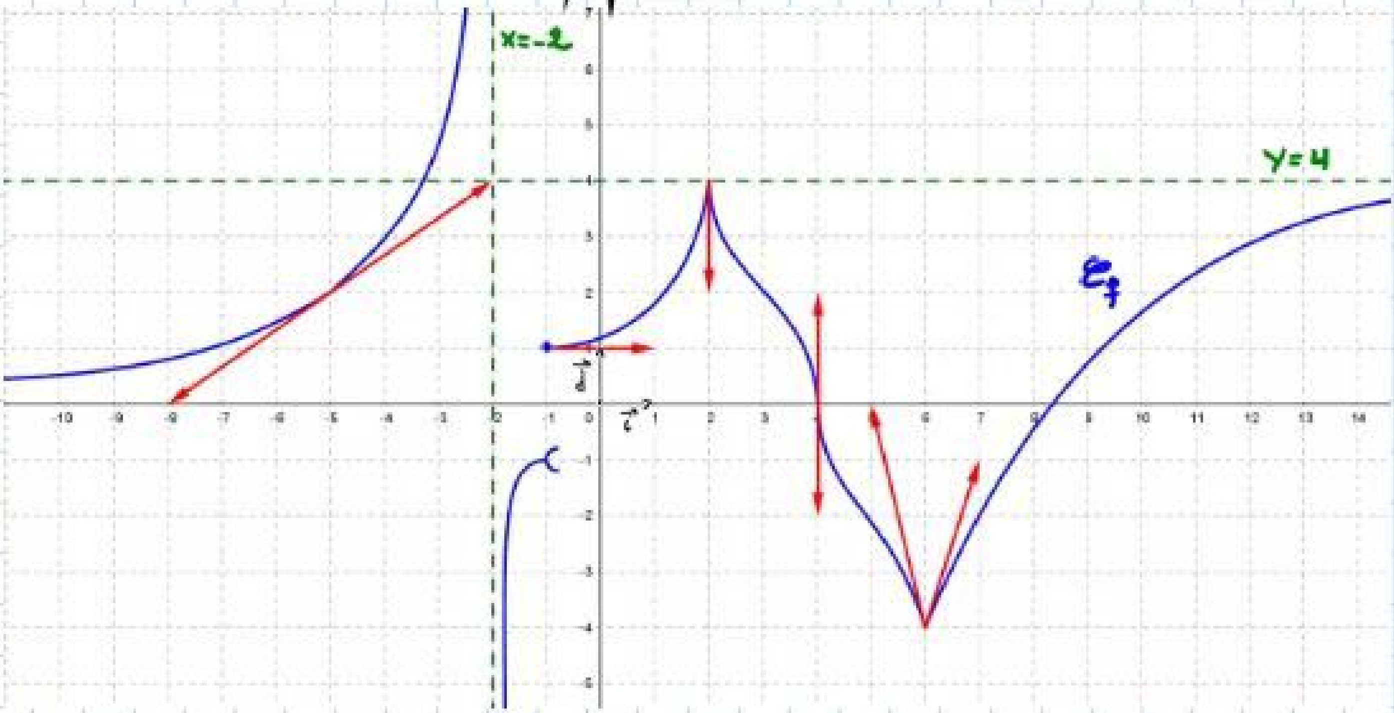
LECTURE GRAPHIQUE



Q1 Déterminer le domaine de définition D_f.

R1 Juste $x=-2$ n'admet pas d'image par la fonction f

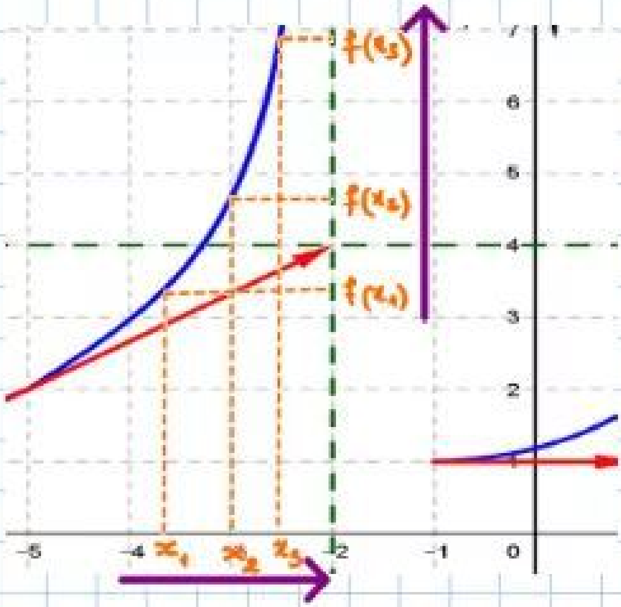
(la droite verticale $x=-2$ ne coupe pas $\mathcal{C}_f$)

Donc $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Q2 Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

R2 Dans ce cas on s'intéresse de la partie de la courbe où les x sont negatives

On constate que si x devient de plus en plus proche de (-2) à gauche $(x_1 \to x_2 \to x_3)$, alors $f(x)$ devient de plus en plus grand $(f(x_1) \to f(x_2) \to f(x_3))$



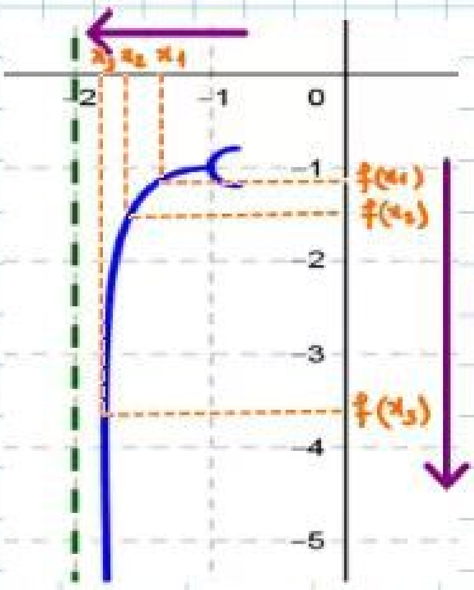
Donc on obtient que :

$$\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$$

Q_5 Déterminer $\lim_{x \to (-2)^+} f(x)$

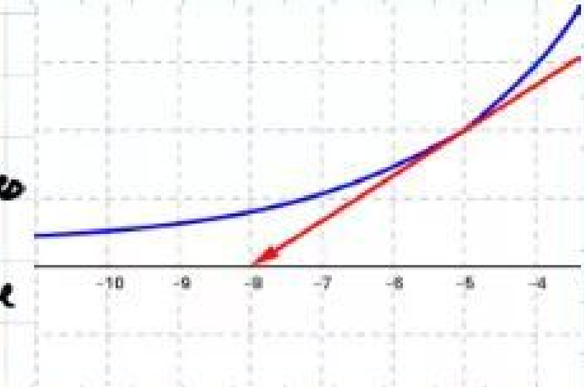
R_5 Dans ce cas on s'interesse de la partie de $\mathcal{C}_f$ où x est voisin de (-2) à droite.

On constate que si x devient de plus en plus proche de (-2) à droite $(x_3 \leftarrow x_2 \leftarrow x_1)$, alors $f(x)$ devient de plus en plus petit et negative $(f(x_3) \leftarrow f(x_2) \leftarrow f(x_1))$, donc



$$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$$

La courbe s'approche de plus en plus de l'axe des abscisses ($y=0$) d'où $f(x)$ s'approche de zéro et par suite

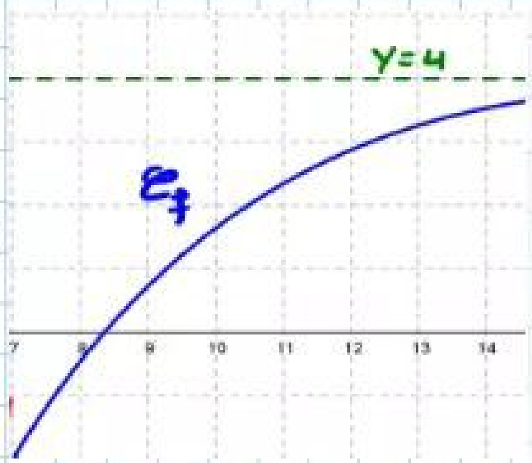


$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

Q3 Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

R3 Dans ce cas on s'interesse de la partie de la courbe où x devient assez grand.

La courbe $\mathcal{C}_f$ s'approche de la droite $y=4$ lorsque x devient de plus en plus grand, donc $f(x)$ s'approche de plus en plus de 4 et par suite : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$



Q4 Déterminer $\lim_{x\to(-2)^-} f(x)$

R4 Dans ce cas on s'interesse de la partie de $\mathcal{C}_f$ où x est voisin de (-2) à gauche

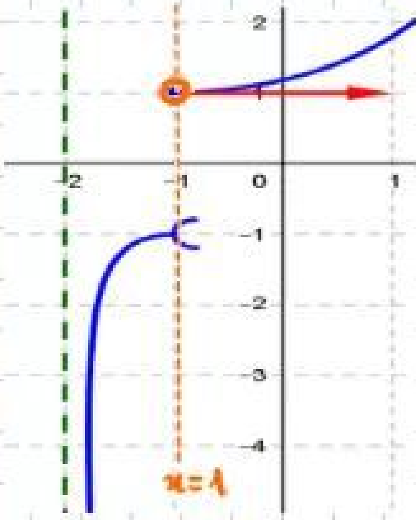
Conclusion : $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$, donc f n'admet pas de Limite en -2

Q6 Peut-on parler de la continuité de f en -2 ? Pourquoi ?

R6 Non, on ne peut pas parler de la continuité de f en -2 car elle n'admet pas de limite en (-2).

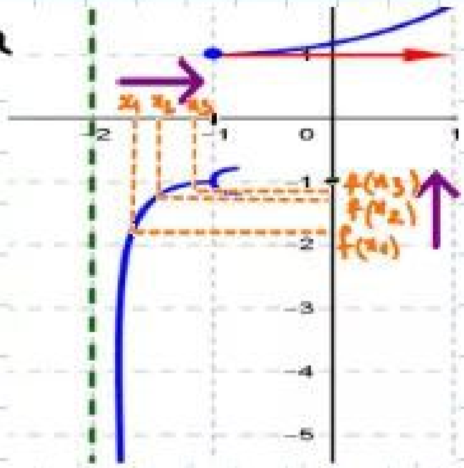
Q7 Déterminer $f(-1)$.

R7 On trace la droite verticale $x = -1$ et on détermine l'ordonné du point d'intersection de cette droite et la courbe (l'arc précise que la droite ne coupe pas la courbe en ce point). Dans notre cas le point d'intersection est $(-1, 1)$ donc $f(-1) = 1$



Q8 Déterminer $\lim_{x \to (-1)^-} f(x)$ et conclure.

R8 On constate que si x s'approche de plus en plus de (-1) à gauche alors $f(x)$ s'approche de plus en plus de -1, d'où on obtient

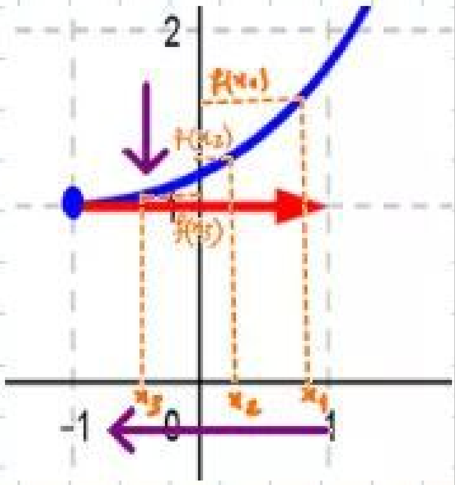


$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -1$$

Conclusion : $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -1 \neq f(-1) = 1$ donc f n'est pas continue à gauche en (-1).

Q9 Déterminer $\lim_{x \to (-1)^+} f(x)$ et conclure.

R9 On constate que si x s'approche de plus en plus de (-1) à droite alors $f(x)$ s'approche de plus en plus de 1, d'où on obtient



$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = 1$$

Conclusion : $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = 1 = f(-1)$ donc f est continue à droite en (-1)

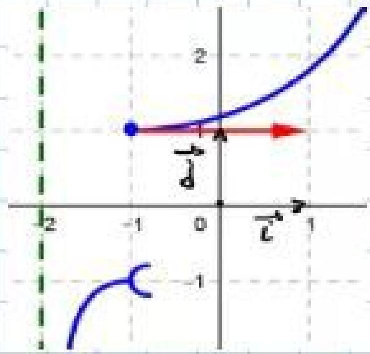
Conclusion générale : f continue à droite (-1) et n'est pas continue à gauche en (-1), donc elle n'est pas continue en (-1)

Q10 f est-elle dérivable en (-1) ? Pourquoi ?

R10 f n'est pas dérivable en (-1), car elle n'est pas continue en (-1). (La dérivabilité nécessite la continuité).

Q11 Déterminer $f'_d(-1)$.

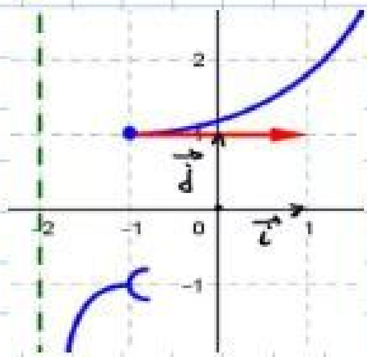
R11 $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse (-1) une demi-tangente horizontale (donc sa pente égale à 0) d'où



$$f'_d(-1) = 0$$

Q12 Déterminer l'équation de la demi-tangente (T_{-1}) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse (-1)

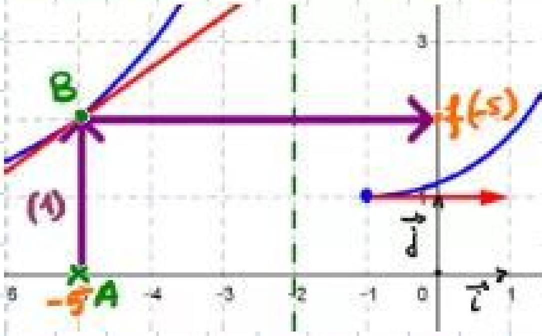
R12 La demi-tangente est horizontale donc d'équation $y = cte$ de plus elle est tracée sur une partie bien déterminée (à droite en -1) c'est à dire pour $x \geq -1$



Ainsi on obtient $T_{-1} : \begin{cases} y = 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$

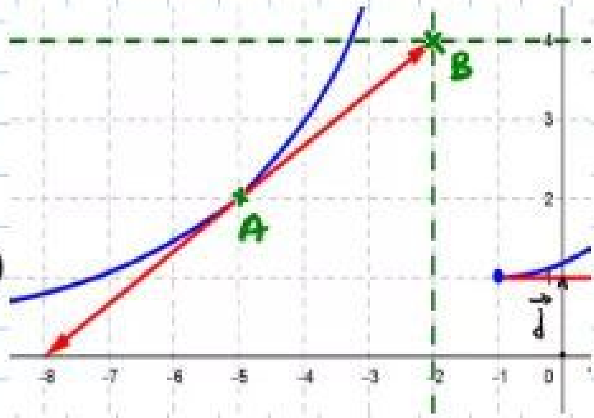
Q13 Déterminer $f(-5)$

R13 A partir du point d'abscisse -5 sur l'axe des abscisse (A) on trace la verticale (haut ou bas) pour déterminer l'intersection de cette droite avec $\mathcal{C}_f$ (B) puis on détermine l'ordonnée de ce point, dans notre cas $f(-5)=2$



Q14 Déterminer $f'(-5)$

R14 Dans le cas des nombres dérivées on s'intéresse des tangentes. Dans notre cas on s'intéresse de la tangente au point d'abscisse (-5). $f'(-5)$ est égale à la pente de cette tangente. On prend 2 point de la tangente et par suite



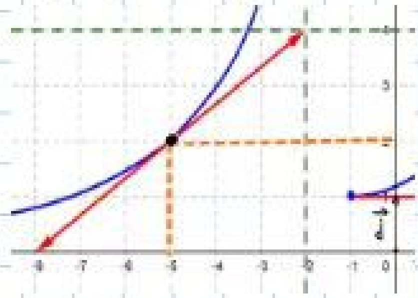
$$f'(-5)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-2}{-2-(-5)}=\frac{2}{3}$$

Donc $f'(-5)=\frac{2}{3}$

Q15 Déterminer l'équation de (T_{-5}) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse (-5).

R15 (T_{-5}) : $y = ax + b$ avec $a = f'(-5) = \frac{2}{3}$

D'où (T_{-5}) : $y = \frac{2}{3}x + b$



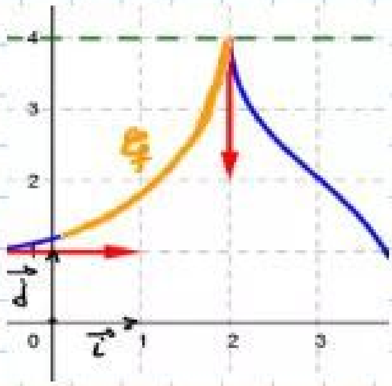
Or le point $(-5, 2)$ appartient à la tangente donc : $2 = \frac{2}{3} \times (-5) + b$

alors $b = 2 + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}$ Ainsi on obtient

$$(T_{-5}) : y = \frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$$

Q16 Déterminer $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

R16 $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ représente le nombre dérivé à gauche en 2



Dans notre cas $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 2 donc f n'est pas dérivable à gauche de 2 et par suite

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \pm\infty$$

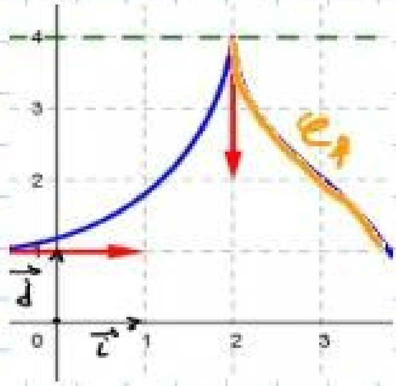
Or la demi-tangente est dirigée vers le bas

alors $\pm\infty$ et 2^- doivent être de signe con c'est à dire $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$

Ainsi on obtient : $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$

Q_{16} Déterminer $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

R_{16} $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ représente le nombre dérivé à droite en 2



Dans notre cas $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 2

donc f n'est pas derivable à droite de 2 et par suite

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \pm\infty$

Or la demi-tangente est dirigée vers le bas

alors $\pm\infty$ et 2^+ doivent être de signe contraires

c'est à dire $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$

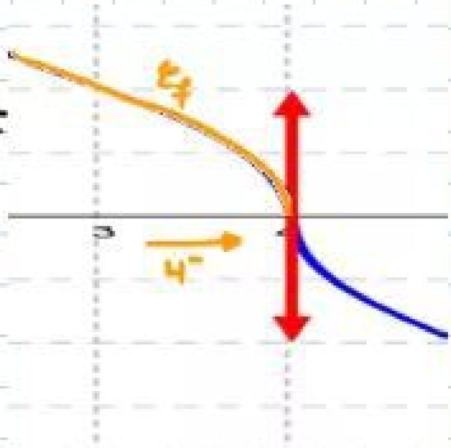
Ainsi on obtient : $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$

Q17 Déterminer $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$

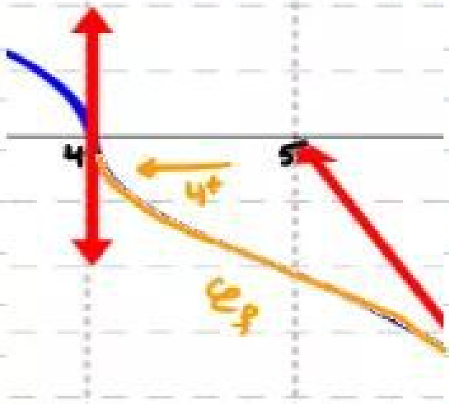
R17 $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 4 une tangente verticale donc f n'est pas dérivable en 4 et par suite on a :

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \pm\infty$$

En 4^-, la demi-tangente verticale est dirigée vers le haut donc 4^- et $\pm\infty$ ont même signe c'est à dire $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$



En 4^+, la demi-tangente verticale est dirigée vers le bas donc 4^+ et $\pm\infty$ de signes contraires c'est à dire $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$

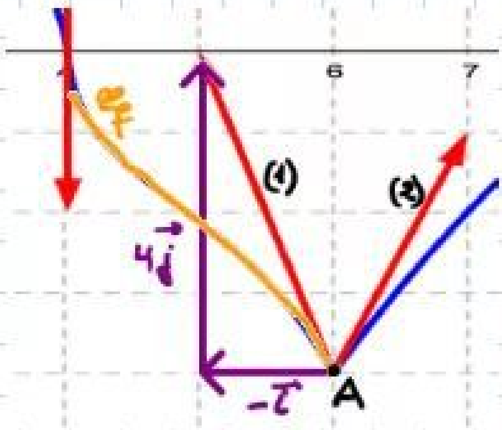


Conclusion : $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$

Q_{18} Déterminer $f'_g(6) = \lim\limits_{x \to 6^-} \dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$

R_{18} On s'intéresse de la demi-tangente (1) à la partie de la courbe où $x \leq 6$



$f'_g(6)$ représente la pente de la droite portant cette tangente

ou bien on détermine le vecteur directeur de cette demi tangente qui va être de la forme $\vec{u}_g \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ f'_g(6) \end{pmatrix}$

Pour cela on part du point d'intersection de la tangente et la courbe (A) et on fait :

1- Un mouvement de $\boxed{-\vec{i}}$ $\quad \xleftarrow{\ -\vec{i}\ }$

2- Un mouvement de $\boxed{\alpha\vec{j}}$ pour rejoint la tangente $\quad 4\vec{j}$

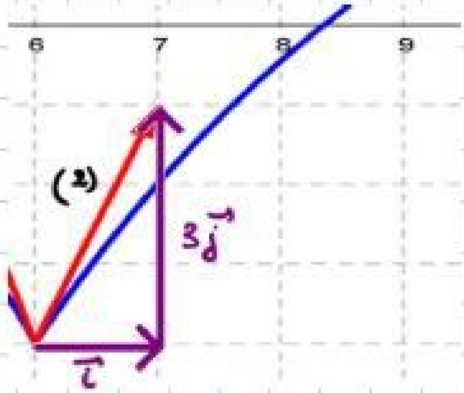
Dans notre cas $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de la demi-tangente donc le vecteur directeur de la demi tangente et $\vec{u} = (-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -4 \end{pmatrix}$

Ainsi $f'_g(6) = \lim\limits_{x \to 6^-} \dfrac{f(x)-f(6)}{x-6} = -4$

Remarque : On a multiplié par -1 afin d'obtenir 1 pour la 1ère composante du vecteur directeur

Q19 Déterminer $f'_d(6) = \lim_{x \to 6^+} \frac{f(x)-f(6)}{x-6}$

R19 On s'intéresse de la demi-tangente (2) de la partie de $\mathcal{C}_f$ à droite de 6



1- Mouvement de $1\vec{i}$

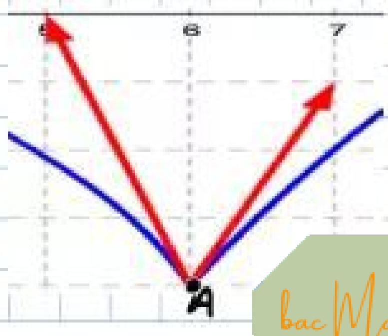
2- Mouvement de $3\vec{j}$

Donc $\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette demi-tangente et par suite on obtient :

$$f'_d(6) = \lim_{x \to 6^+} \frac{f(x)-f(6)}{x-6} = 3$$

Q20 f est elle dérivable en 6.

R20 Au point d'abscisse 6 de la courbe $\mathcal{C}_f$ on a deux demi-tangentes qui forment un point anguleux (A), donc



f n'est pas dérivable en 6

On bien on a : $f'_g(6) \neq f'_d(6)$, donc f n'est pas dérivable en 6.

Q_{21} Déterminer les intervalles où f est continue

R_{21} f est continue sur un intervalle I c'est à dire on peut tracer la courbe de f sur cet intervalle sans lever la main (ou $\mathcal{C}_f$ ne présente pas une rupture sur cet intervalle)

Dans notre cas $\mathcal{C}_f$ admet 2 ruptures en -2 et -1

D'où f est continue sur :

$$]-\infty, -2[\cup]2, 1[\cup [1, +\infty[$$

ouvert car f n'est pas continue à gauche en 1

fermé car f est continue à droite en 1

Q_{22} Déterminer les intervalles où f est dérivable

R_{22} f n'est pas dérivable en x_0 si et seulement si

f n'est pas définie en x_0

ou

f n'est pas continue en x_0

ou

$\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse x_0 un point anguleux

ou

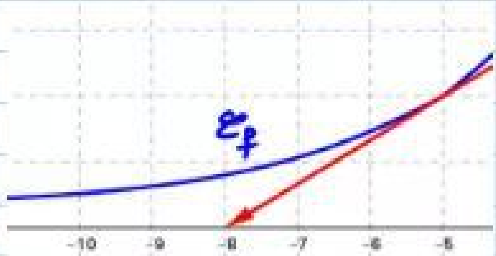
$\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse x_0 une tangente ou demi-tangente verticale

Dans notre cas f est derivable sur :

$$]-\infty,-2[\cup]2,-1[\cup[1,+\infty[\setminus\{4,6\}$$

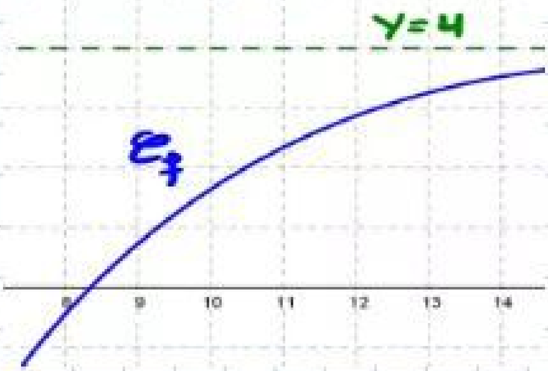
Q23 Déterminer par leurs équations les asymptote de $\mathscr{C}_f$.

R23 • $\mathscr{C}_f$ s'approche de plus en plus de la droite $y=0$ lorsque x s'approche de $-\infty$ donc



la droite $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$

• $\mathscr{C}_f$ s'approche de plus en plus de la droite $y=4$ lorsque x s'approche de $+\infty$ donc la



droite $y=4$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

- On a $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$

Si x s'approche de plus en plus de 2 (à droite ou à gauche) alors $f(x)$ s'approche de ($-\infty$ ou $+\infty$) donc la droite $x = -2$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$