Révision 1

Exercice 1

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $x^{19} \equiv -2[29]$.

1. Justifier que $2^{28} \equiv 1[29]$ et en déduire que -8 est solution de (E').
2. Soit x_0 une solution de (E').
   (a) Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que $x_0^{28} \equiv 1[29]$.
   (b) Montrer que $x_0^{57} \equiv -8[29]$ puis que $x_0 \equiv -8[29]$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E').
   (d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x-3)^{19} \equiv -2[29]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2[29] \\ (x-3)^{13} \equiv -2[13]. \end{cases}$

NB : les solutions dans $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ de l'équation $(E) : 29x - 13y = 6$ sont $(2+13k; 4+29k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 2

1. Soit x un entier non nul premier avec 53 .
   (a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $k, x^{52k+1} \equiv x(\text{mod} 53)$.
2. Soit l'équation $(E_1) : x^{29} \equiv 2(\text{mod} 53)$, où $x \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que 2^9 est une solution de (E_1).
3. Soit x une solution de l'équation (E_1).
   (a) Montrer que x est premier avec 53.
   (b) Montrer que $x^{261} \equiv x(\text{mod} 53)$.
   (c) En déduire que $x \equiv 2^9(\text{mod} 53)$.
4. (a) Montrer que $2^9 \equiv 35(\text{mod} 53)$.
   (b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34(\text{mod} 71) \\ x^{29} \equiv 2(\text{mod} 53) \end{cases}$.

On admet que les solutions de l'équation $(E) : 71u - 53v = 1$ dans $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ sont $(3+53k; 4+71k)$ $(k \in \mathbb{Z})$

Exercice 3

A- Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
2. (a) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que : $0 < \alpha < 1$ et $f(\alpha) = 0$
   (b) En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \geq \alpha$.
3. Soit un réel λ tel que $\alpha \leq \lambda$. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$.
   (a) Calculer $A(\lambda)$
   (b) Trouver la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

B- Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.
On se propose de déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$

1. Démontrer, en utilisant les variations de la fonction f, que :
   $\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}$ et en déduire que : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}$
2. Démontrer alors que : $u_{n+1} \leq u_n e^{-\frac{1}{4n}}$ et en déduire que : $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_T^n \frac{1}{k}}$
3. Démontrer en utilisant la relation (1) de la première question de la partie B du problème, que : $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et en déduire que : $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\ln(n+1)}$
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x)=x^ne^{-nx}$
On appelle C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$(unité graphique : $3cm$)

PARTIE A

1. (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n
   (b) Déterminer la position relative des courbes C_n et C_{n+1}.
2. (a) Tracer C_1 et C_2 en précisant les demi-tangentes à l'origine.
   (b) Calculer l'aire S_n du domaine limité par la courbe C_1 et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=n$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

PARTIE B

Pour tout réel $x\geq 0$ et pour tout entier $n\geq 1$, on pose : $F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$.

1. Montrer que, pour tout $t\geq 0$, on a : $0\leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}}\leq 1$
2. (a) Montrer alors que, pour tout $t\geq 0$ et tout entier $n\geq 1$, on a : $0\leq f_n(t)e^{\frac{-t}{2}}\leq 1$
   (b) En déduire que, pour tout $x\geq 0$ et pour tout entier $n\geq 1$, on a :$0\leq F_n(x)\leq 2$
3. Pour tout réel $u\geq 0$ et pour tout entier $n\geq 1$, on pose :$G_n(u)=\int_0^u t^ne^{-t}dt$
   (a) Montrer que, pour tout entier $n\geq 2$, on a : $G_n(u)=-u^ne^{-u}+nG_{n-1}(u)$
   (b) En déduire que :$G_n(u)=-n!e^{-u}\sum_{p=2}^n \dfrac{u^p}{p!}+n!G_1(u)$
   (c) Montrer alors que : $\lim\limits_{u\to+\infty} G_n(u)=n!$
4. (a) Montrer que, pour tout réel $x\geq 0$ et pour tout entier $n\geq 1$, on a : $G_n'(nx)=n^nf_n(x)$
   (b) Montrer alors que, pour tout réel $x\geq 0$ et pour tout entier $n\geq 1$, on a : $F_n(x)=\frac{1}{n^{n+1}}G_n(nx)$
   (c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$

Révision 2

Exercice 1

Partie I : On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 47x - 43y = 1$

1. Vérifier que le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de l'équation (E)
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)

Partie II : On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F) : x^{41} \equiv 4 \quad [43]$

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F)
   (a) Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1[43]$
   (b) Montrer que : $4x \equiv 1 \quad [43]$, en déduire que : $x \equiv 11 \quad [43]$
2. Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F)

Partie III : On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant $(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases}$

1. Soit x une solution du système (S)
   (a) Montrer que x est solution du système $(S') : \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases}$
   (b) En déduire que : $x \equiv 527 \quad [2021]$ (On pourra utiliser la partie I)
2. Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S)

Exercice 2

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$. Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

1. (a) Montrer que $a^7 \equiv 1[p]$, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}; a^{7n} \equiv 1[p]$
   (b) Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que : $\forall m \in \mathbb{N}; \quad a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$
2. On suppose que 7 ne divise pas $p - 1$
   (a) Montrer que : $a \equiv 1[p]$
   (b) En déduire que : $\quad p = 7$
3. Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1[7]$

Exercice 3

Partie : I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}; (x > 0)$ (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité 2 cm.

1. (a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0.
   (b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0.
   (c) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
2. (a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter analytiquement le résultat obtenu.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. (a) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion A que l'on déterminera.
   (b) Tracer la courbe (C_f)

Partie : II

Soit la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$.

1. Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$,
2. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
   $\forall x \in]0,+\infty[\quad ; \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}} dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$
   (b) Déterminer : $\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}$ dt pour tout x de $]0,+\infty[$
   (c) Montrer que : $\int_0^1 f(x)dx = e^{-1}$
3. Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives, $x=0, x=2$ et $y=0$
4. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $(\forall n \in IN); u_n = F(n) - F(n+2)$
   On admet qu'il existe un nombre réel v_n appartenant à l'intervalle $]n, n+2[$ tel que :
   $u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right) e^{-\frac{1}{v_n}}$.
   (a) Montrer que : $(\forall n \in IN^*) ; 2\left(1+\frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Partie : III

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $a_n \in \mathbb{R}^*$ tel que : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante
   (c) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$
2. (a) Montrer que : $\left(\forall t \in [0,+\infty[\right); 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$
   (b) Montrer que : $(\forall x \in [0,+\infty) ; -\frac{x^2}{2} \leq -x+\ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
3. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 4$
   (a) Vérifier que : $a_4 \geq 1$, en déduire que : $a_n \geq 1$ (On admet que $e^{\frac{3}{4}} \geq 2\Big)$
   (b) Montrer que : $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$ (Voir questions 3) a) et 3)b) de III).
   (c) Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$ (Voir questions 1) c) et 2) b) de III)).
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$

Exercice 4

Une personne débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner que de perdre la première partie.
On admet que, lorsqu'elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0.6, alors que si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est de 0.7.
Pour n entier naturel non nul, on note :
L'événement G_n : La personne gagne la n^{eme} partie :
L'évènement P_n : La personne perd la n^{eme} partie :
$I)$

1. Préciser les valeurs des probabilités de G_1 et P_1.
2. Calculer la probabilité de G_2 et en déduire celle de P_2

$II)$ Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $x_{n+1} = 0.6x_n + 0.3y_n$ et $y_{n+1} = 0.4x_n + 0.7y_n$
2. Pour tout entier naturel non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$

(a) Démontrer que la suite (v_n) est constante.

(b) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

(c) Déterminer pour tout n non nul, l'expression de x_n en fonction de n.

(d) Étudier la convergence de (x_n).

3. On désigne par X la variable aléatoire qui associe le *rang* de la partie gagnée pour la première fois.

(a) Déterminer $p_1 = p(X=1), p_2 = p(X=2)$ et $p_3 = p(X=3)$

(b) Expliciter $p_k = p(X=k)$ en fonction de k où $2 \leq k \leq n$.

(c) Calculer la somme $S_n = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$.

Exercice 5

Partie A

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (x-1)^n e^{2-x}$
On note C_n la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

(b) Dresser le tableau de variation de f_n (On distinguera deux cas : n pair et n impair)

2. (a) Étudier la position relative de C_n et C_{n+1}

(b) En déduire que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes.

3. Construire C_2 et C_3 sur le même repère.

4. Montrer que $\forall x \geq 1$, on a : $0 \leq f_n(x) \leq e^{1-n} n^n$

Partie B

On pose $J_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_1^2 (x-l)^n e^{2-x} dx \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$

1. (a) Montrer en intégrant par parties que $J_{n+l} = J_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$

(b) Calculer J_1

(c) En déduire que $J_n = e - \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k!}$

(d) Montrer que $0 \leq J_n \leq \dfrac{e}{n!}$ et calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)$

2. On pose $F(x) = \int_x^{x+1} \dfrac{e^{2-t}}{t-1} dt ; x \in]1; +\infty[$

(a) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $F'(x) = \dfrac{-e^{1-x}[(e-1)x+1]}{x(x-1)}$.

(b) En déduire le sens de variation de F sur $]1, +\infty[$.

3. (a) Montrer que $\forall x \in]1, 2]$ et $\forall t \in [x; x+1]$ on a $\dfrac{e^{2-t}}{t-1} \geq \dfrac{e^{1-x}}{t-1}$

(b) En déduire que $F(x) \geq e^{1-x}(\ln(x) - \ln(x-1))$ et déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$

Révision 3

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=x^2-2\ln(x)-1$.
On désigne par $(\mathbf{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormè direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE A

1. (a) Étudier les variations de la fonction f.
   (b) Tracer la courbe $\mathbf{C}$
2. Soit λ un réel de l'intervalle $]0,1[$ et $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe $\mathbf{C}$ et les droites d'équations $x=\lambda$ $x=1$ et $y=0$.
   (a) Calculer $\mathcal{A}_\lambda$.
   (b) Déduire $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A(\lambda)=\dfrac{4}{3}$

PARTIE B

Soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$

1. (a) Monter que pour tout entier naturel k tel que $1\leq k\leq n-1$, on a :
$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)dt\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
   (b) En déduire que :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq A\left(\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
2. On pose pour tout entier $n\geq 2$, $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$
   (a) Montrer que : $A\left(\frac{1}{n}\right)\leq S_n\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+A\left(\frac{1}{n}\right)$
   (b) En deduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{4}{3}$
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n tel que $n\geq 2$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
   (b) Montrer que $S_n=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}+2\ln\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}-1+\dfrac{1}{n}$
   (c) En deluire que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$

Exercice 2

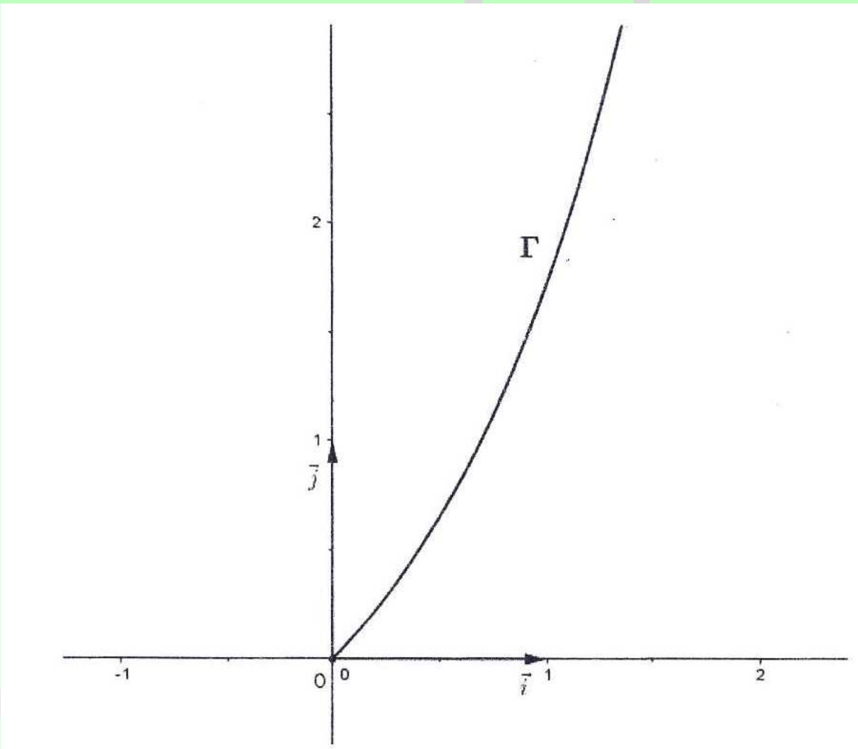
Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{e^x-1}$
On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
2. (a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.
   (b) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty\left[\right., f'(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$.

(c) Dresser le tableau de variation de f.

(d) En déduire que $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$, si et seulement si, $x \leq \ln(2)$.

3. Montrer que le point $B(\ln 2, 1)$ est un point d'inflexion de (C_f).
4. Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x :\mapsto e^x - 1$.
   (a) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ.
   (b) Tracer la courbe (C_f).
5. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan(x)$.
   (a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.
   (b) Calculer $\left(g^{-1}\right)(0)$ et $\left(g^{-1}\right)(1)$.
   (c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g^{-1}(x)}{x} = 1$.
6. On pose pour tout $x \in \left[0, +\infty\right[, F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = 2\left(f(x) - \left(g^{-1} o f\right)(x)\right)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[, F'(x) = G'(x)$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = G(x)$.
   (c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la courbe Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que $A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}$.



Exercice 3

Soient p et q deux nombres premiers vérifiant : $\quad p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1 \quad [pq]$

1. (a) Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.
   (b) En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1[p]$ et que $9^q \equiv 1[p]$
2. (a) Montrer que $p - 1$ et q sont premiers entre eux.
   (b) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $p = 2$
3. (a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $9^{q-1} \equiv 1[q]$
   (b) En déduire que : $q = 5$

Exercice 4

On admet que 2969 est un nombre premier. Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 = 0[2969]$

1. On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n
   (a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u \in Z); u \times n = 1\ [2969]$
   (b) En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1[2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1[2969]$ (On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)
   (c) Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$
   (d) En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} = 1[2969]$
2. (a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise $\boldsymbol{n}$
   (b) Montrer que : $n^2 + m^8 \equiv 0[2969] \Leftrightarrow n \equiv 0[2969]$ et $m \equiv 0\ [2969]$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 2^n + 3.7^n + 14^n - 1$

1. (a) Calculer u_3.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
   (c) On note E l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n). Les entiers $2, 3, 5$ et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?.
2. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 7 . Soient m et n deux entiers naturels tels que $14 = m.n$
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de m ?
   (b) Montrer que $14m^{p-2} \equiv n(\text{mod} p)$.
   (c) En déduire que $14u_{p-2} \equiv 0(\text{mod} p)$.
   (d) L'entier p appartient-il à l'ensemble (E) ?
   (e) Déterminer alors (E).

Révision 5

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 97x - 299y = 81$
(On pourra vérifier que $(7,2)$ est une solution particulière)
2. Soit n un entier à 4 chiffres qui s'écrit $a4b4$. On note m le nombre obtenu si on échange a et b (C'est-à-dire $b4a4$). Le but de cette question et de déterminer m et n sachant que le reste de la division Euclidienne de m par n est 2 . On note q le quotient de cette division.
   (a) Montrer que $q \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
   (b) Montrer que $10(100q - 1)a + 10(q - 100)b + 2(202q - 201) = 0$
   (c) Montrer que $2q - 1 \equiv 0(\bmod 5)$
   (d) En déduire la valeur de q
   (e) Montrer que (b ;a) est une solution de l'équation (E).
   Conclure, c'est-à-dire déterminer m et n.

Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet principal A.
On pose $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv 2\alpha[2\pi]$ où α est un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$.
On désigne par O le milieu de $[BC]$ et par D le symétrique de A par rapport à O.
Soient I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC).

PARTIE A

1. Soit f la similitude directe qui transforme O en I et D en J.
   (a) Montrer que f a pour angle α et pour rapport $\cos\alpha$.
   (b) Prouver que le centre de f est le point A.
2. On désigne par E le symétrique du point O par rapport au point I.
   (a) Montrer que $f(B) = O$ et que $f(C) = E$.
   (b) En déduire que $\frac{OE}{BC} = \cos\alpha$.
3. Soit σ la similitude indirecte telle que : $\sigma(B) = O$ et $\sigma(C) = E$.
   (a) Déterminer le rapport de σ.
   (b) Montrer que $\sigma(O) = I$.
4. On désigne par $S_{(OE)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OE).
   (a) Montrer que $\sigma = S_{(OE)} \circ f$.
   (b) Montrer que $\sigma(D) = A$ et $\sigma(A) = J$.
5. Soit Ω le centre de σ.
   (a) Montrer que $(\sigma \circ \sigma)(D) = J$ et en déduire que Ω appartient à la droite (DJ)
   (b) Montrer que Ω appartient à la droite (BI).
   (c) Construire le point Ω.
   (d) Montrer que $\overrightarrow{\Omega I} = (\cos^2 a)\,\overrightarrow{\Omega B}$.

PARTIE B

Dans cette partie on suppose que $OC = 1$ et on munit le plan du repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OC}$.

1. Montrer que $(\widehat{\overline{OC}, \overline{OI}}) = \alpha[2\pi]$ et que $OI = \cos\alpha$.
2. En déduire que $\overrightarrow{OI} = (\cos^2\alpha)\,\overrightarrow{u} + (\cos\alpha\sin\alpha)\overrightarrow{v}$.
3. Montrer que les coordonnées x et y du point Ω sont telles que $x = 2\,\text{cotan}^2\,\alpha$ et $y = \text{cotan}\,\alpha$.
4. determiner l'equation cartiesienne de Γ : ensemble des points Ω lorsque α varie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

OMARKARIM32@GMAIL.CO
92 04 66 66

Exercice 3

PARTIE A

Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

1. 1)Soit $h \in]0, +\infty[$. On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \mapsto (\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2})x^2 - \ln(1+x) + x$..
   (a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel : $c \in]0, h[$ tel que : $\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2} = \dfrac{-1}{2(c+1)}$
   (b) Prouver donc que : $\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right) = \dfrac{-1}{2}$
   (c) Prouver enfin que f est dérivable à droite en 0 et que : $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$
2. (a) Justifier que : $\forall x \geq 0 : \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2} \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t}$
   (b) Déduire que $\forall x \geq 0 : \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leq 0$.
   (c) Donner enfin le signe de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f.

PARTIE B

Pour tout $a \in]0, 1]$, on pose : $u_n(a) = \int_0^a t^n f(t)dt$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Prouver que (u_n) est convergente.
3. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0; f(x) \leq 1$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, on $a : u_n \leq \frac{a^{n+1}}{n+1}$.
   (c) Préciser donc $\lim_{n\to+\infty} u_n$

PARTIE C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$ et $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq W_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ puis calculer sa limite.
   (b) Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$ puis calculer U_1.
2. On pose $S_n = 1 - x + x^2 + \ldots. + (-1)^n x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; 1]$
   (a) Montrer que : $S_n = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$ et que : $V_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$
   (b) En déduire que : $|V_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+2}$ puis calculer la limite de (V_n).
3. (a) En utilisant une intégration par parties pour U_n, montrer que : $W_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (\ln 2 - V_n)$
   (b) En déduire la limite de (H_n) définie par : $H_n = (n+1)W_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4

PARTIE A

1. Etudier les variations de la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$xI \longrightarrow (1-x)e^{-x} + 1$$

et déduire que pour tout réel x on a : $g(x) > 0$.

omarkarim32@gmail.co
92 04 66 66

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + x$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Etudier les variations de la fonction f.
   (b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$. Etudier la position de C par rapport à Δ.
   (c) Tracer la courbe C.
3. Soit α un réel strictement positif. on désigne par $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par C, Δ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.
   (a) Calculer $A(\alpha)$.
   (b) Déterminer $A(1)$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

PARTIE B

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction F_n definie sur $[0, +\infty[$ par : $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$ '

1. Montrer que $F_1(x) = 1 - (1 + x)e^{-x}$
2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$F_n(x) = nF_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$$

   (b) Démontrer par récurrence que tout entier naturel non nul n on a :

$$F_n(x) = n! \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} e^{-x}\right)$$

   où x est un réel strictement positif.
   (c) En déduire $\lim_{x \to +\infty} F_n(x)$.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel strictement positif x on a :

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x} \leq F_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

.
4. Soit x un réel strictement positif.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2x$, on a : $\dfrac{x^n}{n!} \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.
   (b) En déduire que $\lim_{I \to +\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.
   (c) Montrer que $e^X = \lim_{I \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.
5. En utilisant les questions 2) b) et 3)
   (a) Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \leq e \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$
   (b) En déduire un encadrement de e d'amplitude $d < 10^{-2}$.

omarkarim32@gmail.co
92 04 66 66