Exercice 1: Vrai ou Faux

1) Soit $n\in IN$, $(\sqrt{3}+i)^n$ est un imaginaire pur ssi : $n \equiv 3$ (mod 6).

2) x et y sont deux entiers et tel que pgcd(24x,64y) = 64 alors $x \equiv 0$ (64)

3) L'équation : 6x + 18y = 3 admet dans IN x IN : une infinité de solutions

4) Soit n un entier non nul tel que $5n \wedge (3^2 x 5^3 x 7)=35$ **alors** $n\equiv 0$ (7).

5) Soient a et b deux entiers non nuls tel que a+b et a-b sont premiers entre eux alors a et b sont premiers entre eux.

6) On considère l'équation (E) : 24x – 16y = 8 ; où x et y sont des entiers relatifs.
Les solutions de (E) sont de la forme : (x,y) = (3k + 1 ; 2k + 1) , $k\in Z$.

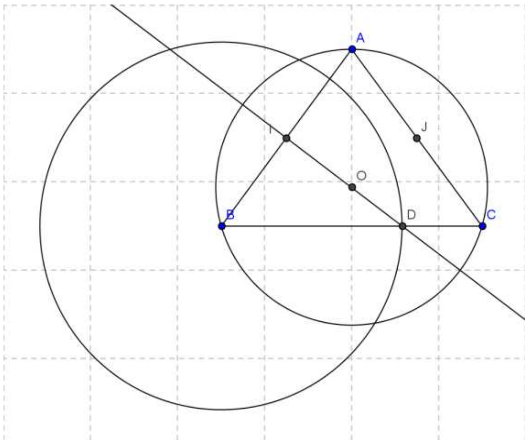
10) On considère l'équation (E'): $x^2 + 5x - 2 \equiv 0$ [17]
Les solutions de (E') sont de la forme : x = 17k - 13 ou x = 17k + 8 , $k\in Z$.

11) Soit $N = (22)^{3n+2} + (13)^{3n+1}$;n est un entier naturel, alors: $N \equiv 1$ [9]

12) La courbe de la fonction f définie par $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$ admet un centre de symétrie.

Exercice :2(5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans l'annexe ci-jointe :



- ABC est un triangle isocèle direct en A tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \alpha[2\pi]$ où α est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC].
- C est le cercle circonscrit au triangle ABC de centre O,
- D le point d'intersection des droites (OI) et (BC).
- Γ le cercle de centre B et passant par D.

1°)a)Mqu'il existe un unique antidéplacement g tel que g(B) = A et g(I) = J.
 b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
 c) Déterminer l'image de A par g.

2°) Soit f le déplacement tel que f(A) = C et f(B) = A.
a) Montrer que f est une rotation d'angle - 2α. Déterminer le centre de f.
b) Quelle est l'image de I par f.

3°) Soit Δ la droite telle que $f = S_{(OA)} o S_{\Delta}$ où $S_{(OA)}$ et S_Δ désignent les symétries orthogonales d'axes respectifs (OA) et Δ. (f le déplacement défini en 2°))
a) Déterminer l'image de A par l'isométrie $S_{(OA)}$of. En déduire que Δ = (OI).
b) Construire le point D' = f(D) puis montrer que D' appartient à la droite (OJ).
c) La droite (AD) recoupe Γ en E. Montrer que f(E) = D.
d) En déduire que DE = DD' et $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DD'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})(2\pi)$

Exercice 3 :(8 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur]-2, +∞[par : $f_n(x) = \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan menu d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$] (unité 2 cm).

A/1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$.

b) Quelle propriété concernant la courbe (C_n) peut – on déduire ?

2) a) Montrer que pour tout réel x > - 2, $f_n'(x) = \dfrac{(x-n+2)e^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}$ où f_n' désigne la fonction dérivée de f.

 b) Dresser le tableau de variation de f_n.

3) a) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A que l'on déterminera.

b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) en A.

4) a) Montrer que pour tout entier n non nul, et pour tout réel x > -2, on a : $f_n^{'}(x)=f_n(x)-n\,f_{n+1}(x)$

b) En déduire les positions relatives des courbes(C_1) et (C_2).

c) Représenter graphiquement (C_1) et (C_2).

d) Calculer l'aire du domaine limité par les deux courbes (C_1) et (C_2) et les droites x = - 1 et x = 1.

B/ Soit la suite (u_n) définie par : $u_n=\int_{-1}^{0} f_n(x)\,dx$, pour tout entier naturel non nul n.

1) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1-2^{-n+1}}{n-1}\le u_n \le \frac{1-2^{-n+1}}{n-1}.e$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $n.u_{n+1}=1+u_n-\frac{e}{2^n}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}dx$

Exercice 4:

n étant un entier naturel non nul, on place dans une urne n boules rouges , 8+n boules noires et 20 boules blanches . Un joueur tire une boule de l'urne, on suppose tous les tirages équiprobables.
S'il tire une rouge, il perd. S'il tire une noire, il gagne. S'il tire une blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage. S'il tire une noire, il gagne sinon il perd.

1) Déterminer la probabilité que ce joueur a de gagner est p(n)=$\frac{(n+8)(n+24)}{2(n+14)^2}$

b) Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit maximale. Calculer alors cette probabilité.

c) Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit minimale. Calculer alors cette probabilité.

2) Dans cette question, on prend n=16. Pour jouer le joueur a misé 8 unités monétaires. p et q étant des entiers naturels tels que p>q>8. S'il gagne à l'issue du premier tirage, on lui remet p unités monétaires et s'il gagne à l'issue du deuxième tirage on luit remet q unités monétaires. S'il perd il ne reçoit rien.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur .

a) Déterminer la loi de X en fonction de p et q ainsi que E(X).

b) On suppose que p et q sont tels que le jeu est équitable .
Montrer alors que 3p + q = 60. Déterminer les couples (p, q) possibles pour que le jeu soit équitable.

c) Pour p = 16 et q = 12, calculer E(X) et l'écart type X.

Exercice : 5

I) On considère, dans IC, l'équation ; (E) : $z^2-e^{i\theta}z-i+e^{-i2\theta}=0, \theta\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$

1) Développer $(e^{i\theta}+2ie^{-i\theta})^2$

2) Résoudre dans IC l'équation (E)

II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) .

On considère les points A, M et N d'affixes respectives : $z_A=2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_M=e^{i\theta}+ie^{-i\theta}$ et $z_N=-ie^{-i\theta}$.

1) Déterminer la forme exponentielle de z_M .

2) Montrer que M décrit le segment [OA] privé des points O et A, lorsque θ varie.

3) Déterminer et construire l'ensemble γ des points N lorsque θ varie.

4) Soit H le point d'affixe $z_H=-\frac{z_M}{2}$.

a) Vérifier que $z_N-z_H=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) Montrer que H est le projeté orthogonal de N sur (OA).

c) Déterminer θ pour que l'aire du triangle OMN soit maximale.

Exercice:6

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, u, v) Soient les points A et B du plan d'affixes respectives z1 et z2 tels que O, A et B ne sont pas alignés. On considère le point M d'affixe z vérifiant la relation : $z = \frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

I/ 1) Montrer que : $\frac{z_2-z}{z_1-z} = -\frac{z_2}{z_1}$

2) Montrer que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi]$

3) En déduire que M appartient au cercle C circonscrit au triangle OAB.

II) On suppose de plus que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation :

$(E_\theta): z^2 - 2(e^{i\theta}+1)z + 2e^{i\theta} - 2 = 0, \theta \epsilon]0, \pi[$.

1)a) Montrer que $z = 2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$.

b) Donner la forme algébrique de z .

c) Déterminer alors l'ensemble des points M lorsque θ décrit]0, π[.

Pour la suite on prendra $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

On pose $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}z_1$ et $Z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}}z_2$. z_1 et z_2 sont les solutions $\left(E_{\frac{2\pi}{3}}\right)$

On désigne par A' , B' et C' les points d'affixes respectives Z_1 , Z_2 et $Z_{M'} = e^{i\frac{\pi}{12}}z_M$.

3)a) Soit K et K' les milieux respectifs des segments [AB] et [A'B']. Vérifier que $z_K = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_{K'} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

b) En remarquant que $(Z_2 - Z_1)^2 = (Z_2 + Z_1)^2 - 4Z_1Z_2$, vérifier que $(Z_2 - Z_1)^2 = 4((Z_{K'})^2\left(i\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^2$.

c) Montrer que $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{K'E})$+$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{K'F}) \equiv 0$ [π] où E et F sont les points d'affixes $Z_F = -Z_E$.
En déduire que la droite (A'B') porte la bissectrice intérieure de l'angle EK'F.

Exercice :7

ABC un triangle rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et O le milieu de [BC].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O en A et B en C.

b) Montrer que f est une rotation.

c) On note I le centre de f. Donner une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO})$ et $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA})$.

d) En déduire que I appartient au segment [AB] et que I est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1).

2) a) Soit r = $R_{(C,\frac{\pi}{3})}$. Caractériser l'application f o r.

b) On note C' l'image de C par f. Montrer que O , I et C' sont alignés .

3) Soit g l'antidéplacement qui envoie O en A et B en C.

a) Déterminer les images des droites (OI) et (OA) par g.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice 8:

Soit a un entier naturel non nul et premier avec 5.

1) En utilisant les restes possibles de la division euclidienne de a par 5, montrer que $a^4 \equiv 1$ (mod 5).

2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que p ≤ q et q ≡ p (mod 4).

a) Montrer que $a^p \equiv a^q$ (mod 5).

b) Montrer que $a^p \equiv a^q$ (mod 2).

c) En déduire que $a^p \equiv a^q$ (mod 10).

3) Soit dans ZxZ l'équation (E) : 25x – 21 y = 4.

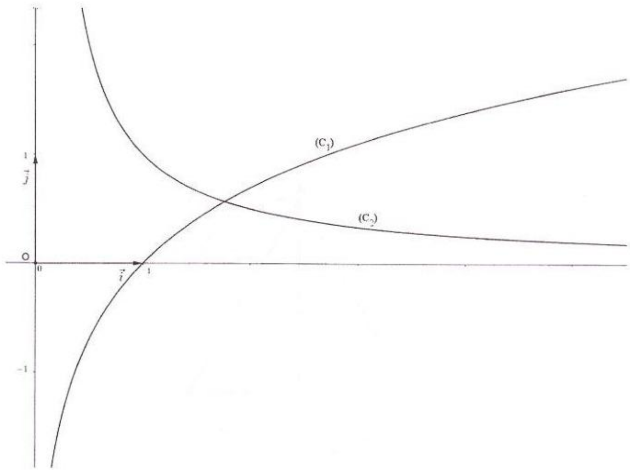
a) Vérifier que si (x_0, y_0) solution de (E) alors $x_0 \equiv 1$ (mod 21). Déduire une solution particulière de (E).

b) Résoudre dans Z² l'équation (E).

c) En déduire l'ensemble A des solutions de l'équation (E) dans IN².

d) Soit (α, β) un élément de A. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et premier avec 5, n^α *et* n^β ont le meme chiffre d'unité.

Exercice 9 :TN 2018 :



1) Montrer que pour tout x > 0, $1 + x\ln x \geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur]0,+∞ [

par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+x\ln x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = +\infty$. Interpréter.

c) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. Interpréter.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Dans la figure ci-contre , on a tracé dans un r.o.n (o,$\vec{i},\vec{j}$) les courbes (C_1) et (C_2) des fonctions définies sur]0, + ∞[respectivement par x→ $\ln x$ *et* $x \to \frac{1}{x}$.

a) Construire le point A de (C_1) d'abscisse $\frac{1}{e}$ et le point B de (C_2) d'abscisse 1- $\frac{1}{e}$

En déduire une construction du point C de Cf d'abscisse $\frac{1}{e}$.

b) Déduire de la question 1 que pour tout x > 0, f(x)≤ $\frac{1}{x}$.

Déterminer alors la position de (Cf) et (C_2).

c) Tracer la courbe Cf.

5) On considère la fonction F définie sur [1, + ∞[par : F(x) =$\int_1^x f(t)dt$.

a) Montrer que pour tout t ≥ 1, $\frac{1}{t+t\ln t} \leq f(t)$.

b) Montrer alors que pour tout x ≥ 1, $\ln(1+\ln x) \leq F(x) \leq \ln x$.

c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.

6) Soit n >0.

a) Montrer que la fonction h :$x \to x - F(x)$ est une bijection de [1, + ∞[sur [1, + ∞[.

b) En déduire que l'équation h(x)= n admet dans [1, + ∞[une seule solution α_n.

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

d) Vérifier que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1-\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.

Exercice 10 :

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A : À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication La chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable =0.98

· La chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;

C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1) Montrer que P(C) = 0,03x + 0,95 .

2) À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.

Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Exercice 11 (4points)

1) Soit dans Z² l'équation (E) : 1111 x – 10^4 y = 1.

a) Vérifier que (- 9, -1) est une solution de (E) .

b) Résoudre l'équation (E) .

2) Soit n un entier .

a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que n =1111p et n=1+q10^4 alors (p, q) est une solution de (E).

b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que $\begin{cases} n \equiv 0 \ (mod\ 1111) \\ n \equiv 1 \ (mod\ 10^4 \ ) \end{cases}$

c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

Exercice1 2 TN 2017:

Soit f la fonction définie sur IR+ par f(x) = $\sqrt{e^x - 1}$. On note Cf sa courbe dans un r o n (O, i, j).
1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2) a) Dresser le tableau de variation de f.
b) En déduire que $e^x - 1 \le \sqrt{e^x - 1}$ $si\ rt\ seulement\ si\ x \le ln2$.
3) Montrer que le point B(ln2, 1) est un point d'inflexion de (Cf).
4) Tracé dans le repère (O, i, j) la courbe C' de la fonction : x :→ $e^x - 1$.
a) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à C'.
b) Tracer la courbe (Cf).
5) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par g(x) = tan(x).

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur IR+.
b) Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.
c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur IR+ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
d) Montrer que $\lim_{x\to 0+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$.
6) On pose pour tout $x \geq 0, F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = 2(f(x) - (g^{-1}of)(x))$.
a) Montrer que pour tout x > 0, F'(x)= G'(x).
b) En déduire que pour tout x ≥ 0, F(x) = G(x)
c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Cf, la courbe C' et les droites d'équations x=0, x= ln2.
Montrer que A = 1 + ln2 - $\frac{\pi}{2}$.
7) Soit n un entier naturel tel que n≥ 2.
On désigne par fn la fonction définie sur $[\ln(n), +\infty[$ par: $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$.
On note Cn sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, i, j).
a) Soit G_n la fonction définie sur $[\ln(n), +\infty[$ par $G_n(x) = 2(f_n(x) - \sqrt{n}g^{-1}\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)$.
Montrer que pour tout $x \in [\ln(n), +\infty[, G_n(x) = \int_{lnn}^x f_n(t)dt$.
b) Vérifier que pour tout $x \geq lnn, \sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$.
c) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par la cube C_n, la courbe C' et les droites d'équations x = lnn et x = ln(n+1). Montrer que $A_n = 2\sqrt{n}g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 1$.
d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} A_n$.

Exercice1 3:

Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre1, deux qui portent le nombre e et six qui portent le nombre 1/e.

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par x et y les nombres lus respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés. A cette expérience, on associe le point M d'affixe z = lnx + i lny.

1) Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, i, j). Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : M appartient à l'axe des abscisses.

B : z est imaginaire

C : M appartient aux deux axes .

D : M n'appartient à aucun des axes

E : arg(z)= $\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

F : $|z| = 1$.

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la distance OM

a) Déterminer la loi de X.

b) Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 14:

On donne un cercle (C) de centre O de rayon R. Soit I un point tel que 0 < OI < R
Soit M un point de (C) et P le symétrique de M par rapport à I .
1. Déterminer l'ensemble des points P lorsque M décrit le cercle (C).
2. Soit N le point tel que MP = MN et $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Soit Q le milieu de [NP]
(a) Montrer que Q est l'image de M par une rotation fixe que l'on précisera.
(b) En déduire l'ensemble des points Q lorsque M décrit (C).
(c) Déterminer l'ensemble des points J milieu de [MN]
3. Soit A le point intersection du cercle (C) et la demi-droite [OI), B le symétrique de O par rapport à A.
Soit M un point fixé sur le cercle (C).
(a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que g(M) = A et g(O) = B.

(b) Déterminer M pour que g soit une symétrie axiale.
(c) Si g est une symétrie glissante donner alors la forme réduite de g.

Exercice 15 :

Soit $\theta \in]0, \pi[$

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2z + 1 - e^{i2\theta} = 0$

2) Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère l'équation :

(E) :$z^3 - (2+i)z^2 + (1 + 2i - e^{i2\theta})z + i(e^{i2\theta} - 1) = 0$

a) Vérifier que i est une solution de (E).

b) Résoudre (E) et donner l'écriture exponentielle des solutions.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, u, v),

on désigne par A(2), $M_1(1+e^{i\theta})$ et $M_2(1- e^{i\theta})$

a) Montrer que le quadrilatère OM_1AM_2 est un parallélogramme.

b) Pour quelle valeur de θ a-t-on OM_1AM_2 un losange ?

c) Soit I = M_1*M_2. Déterminer et construire l'ensemble des points M1 lorsque $\theta \in]0, \pi[$.

En déduire l'ensemble des points M_2 lorsque $\theta \in]0, \pi[$.

.

Exercice 16:

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ;

$u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n , l' écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n , u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \ (11)$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n , u_n n'est pas divisible par 11.

6. a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 \ (17)$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8}, est divisible par 17.

Exercice 17 :

On considère la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \ln(n)$

1) a) Calculer u_1 *et* u_2

b) Montrer que pour tout n de IN*, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n})$

2a) Soit n de IN* , montrer que $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{1+k}{n}} \ln x \, dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1+k}{n}\right)$

b) En déduire que pour tout n de IN*, $u_n - \frac{1}{n}\ln 2 \le \int_1^2 \ln x \, dx \le u_n$

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 18 :

Soit $f_n(x)= \sqrt{1+x}\ e^{-\frac{x}{n}}$; x ≥ -1 et n > 0, on désigne par C_n la courbe de f_n.

1)Mque toutes les courbes C_n passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2)a)Mque pour tout n>0, la courbe C_n admet une tangente horizontale en un point M_n.

b)On désigne par α_n l'abscisse de M_n. Etudier la nature de la suite (α_n)

3)Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+1}.

4)On pose I= $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\,dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie par $A_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx$

a)Calculer I.

b)Mque pour tout n >0 ; $1-e^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{1}{n}}-1$

c)En déduire que pour tout x $\in[-1, 1]$, $\left|e^{-\frac{x}{n}}-1\right| \leq e^{\frac{1}{n}}-1$

d)Mque $\left|A_n - I\right| \leq \frac{4}{3}\sqrt{2}\,(e^{\frac{1}{n}}-1)$

e)En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 19;

Le plan P est muni d'un repère orthonormé (O, u, v).

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2+4z=-8$

2) On considère dans C ; (E) : $z^3+2z^2-16=0$

a) Vérifier que 2 est une solution de (E).

b) En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique.

3) a) Placer les points A, B et D d'affixes respectives $z_A=-2-2i, z_B=2$ et $z_D=-2+2i$

b) Déterminer l'affixe de C tel que ABCD soit un parallélogramme.

4) Soit E l'image du point C par $R(B,-\frac{\pi}{2})$ et F l'image de C par $R(D,\frac{\pi}{2})$

a) Déterminer les affixes des points E et F .

b) Construire les points E et F et Déterminer la nature du triangle AEF.

5) Soit f l'antidéplacement tel que f(A)= E et f (F)= A.

Caractériser f

Exercice 20 (5 points)

Soit f la fonction définie sur [0, +∞[par : $f(x)=\frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1) a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c/ Tracer dans un repère orthonormé (unité 2cm) la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.

2) a/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b/ Tracer la courbe ($\mathcal{C}'$) représentative de f^{-1}.

3) x étant un réel tel que $0 < x \leq 1$.

a/ Calculer $G(x)=\int_x^1 t\,f'(t)\,dt$.

b/ On pose $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$. Exprimer F(x) + G(x) en fonction de x.

c/ Expliciter alors F(x).

4) a étant un réel tel que $0 < a < 1$

a/ Calculer l'aire A(a) de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = a et x =1.

b/ Calculer la limite de A(a) quand a tend vers 0 à droite.

c/ En déduire l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$) , ($\mathscr{C}'$) et les droites d'équations respectives x = 1 et y = 1.

5) n étant un entier naturel tel que $n \geq 2$.

a/ Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique $u_n \in]0, +\infty[$.

b/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.

c/ Calculer la limite de (u_n).

<u>Exercice 21:</u>

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur **N** par : $U_0 = 0$, $U_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$; $V_0 = 1$, $V_{n+1} = \frac{3u_n+2v_n}{5}$

1) Mque pour tout entier naturel non nul n, $U_n \leq V_n$.

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

3) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

4) Soit la suite (W_n) définie sur **N** par : $W_n = 9U_n + 5V_n$.

a) Montrer que la suite (W_n) est une suite constante.

b) En déduire la limite commune des suites (U_n) et (V_n).

La musique est une mathématique sonore,
la mathématique est une musique silencieuse. *Edouard Herriot*

Exercice :1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1)Soit ABCD un carré direct de centre O.

On considère l'application $f = S_{AC} o t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer f(A) et f(D). En déduire que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

2)Soit g une fonction dérivable sur IR telle que $g(1)=\frac{-1}{4}$ et $g'(1) = \frac{1}{4}$

Calculer $\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi g(x))+1}{x-1}$

3)Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - x\right)$

Exercice :2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$), on donne les points A, B et C d'affixes respectives 1 + i, 1 + 2i et 2 + 2i.

Soit φ l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', défini par $-2\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'M_1} = \vec{O}$ où M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

1°) Montrer que OICB est un parallélogramme de centre A.

2°)a) Montrer que $z' = -\bar{z} + 2 + 2i$

b) Donner la nature de φ.

3°)a) Montrer que $\varphi = S_A o S_{OI}$ où S_A désigne la symétrie centrale de centre A.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de φ.

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$),.

1) Résoudre dans C l'équation :

(E) :$z^2 - iz\left(1 - e^{i\theta}\cos\theta\right) + e^{i\theta}\cos\theta = 0, \theta \in IR$

2) On considère les points A, B et M d'affixes respectives i, $\frac{i}{4}$ et $\frac{1}{i+\tan(\theta)}$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On note N le milieu du segment [AM].

a)Montrer que $z_N = \frac{1}{4}(\sin(2\theta) + 2i\sin^2(\theta))$.

b)Prouver que, lorsque θ varie dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le point N varie sur le cercle Γ de centre B et de rayon $R = \frac{1}{4}$ privé d'un point à déterminer.

c)En déduire l'ensemble des points M, lorsque θ varie dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

d)Ecrire z_M sous forme exponentielle.

Exercice :4

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies sur IN par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_n = \frac{7}{u_n}$.

1°) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2°)a) Démontrer que quel que soit n de IN, $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$

b) En déduire que quel que soit n de IN, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

c) Conclure que quel que soit n, on a : $u_n - v_n \geq 0$.

3)a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante

b) En déduire que la suite (v_n) est croissante.

4)a) En s'aidant de la question 2.c et de la question 3.b, démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geq \frac{21}{8}$.

b) Utiliser le résultat précédent et le résultat de 2.b pour démontrer que pour tout n de IN,

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$$

c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout n de IN, $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n-1}}$

d) Déduire la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers +∞.

5°) Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice : 5

Répondre par vrai ou faux

1) n est un entier naturel ayant pour écriture aba7 en base dix.

n est divisible par 7 ⇔ a + b ≡ 0 (mod 7)

2) $\lim_{x\to+\infty} e^x \ln(1+e^{-x}) = 0$

3) Soit a et b deux entiers tels que 4a +3b = 5 alors pgcd(a, b) = 5.

4) Si un entier n est divisible par 4 et par 6 alors il est divisible par 12.

Exercice :6

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1) Montrer que OBAC est un losange.

2)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f(B) = A.

b)Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

c)Montrer que $f = R_{(O, \frac{-\pi}{3})} o S_{AB}$.

d)Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{(O, \frac{\pi}{3})} o\, t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$.

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{BC}\ o\ S_{AC}\ o\ S_{AB}$.

a)Montrer que $S_{AC}\ o\ S_{AB} = S_{AO}\ o\ S_{AC}$..

En déduire que $\varphi = S_{IK}\ o\ S_{IJ}\ o\ S_{AC}$. où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).

b)Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

a)Montrer que g fixe le point O.

b)Montrer que g([BC]) = [BC].

c)Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice :7

Pour tout n ≥ 1, $I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{1-t}dt$, x ∈ IR

1)Calculer $I_1(x)$

2)a)En intégrant $I_n(x)$ par parties,
Calculer $I_{n+1}(x) - I_n(x)$, (n ≥1)

b)Déduire que $I_n(x) = e - \left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)e^{1-x}$.

3)On suppose maintenant que x est un élément fixé de]0, 1]

a)Démontrer que, pour tout n > 0,

$0 \le I_n(x) \le \frac{1}{n!} e\,(1-e^{-x})$

b)Déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$

c)Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = e^x$.

Exercice : 8

I) On considère, dans IC, l'équation ;

(E) : $z^2 - e^{i\theta}z - i + e^{-i2\theta} = 0, \theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$

1) Développer $(e^{i\theta} + 2ie^{-i\theta})^2$

2) Résoudre dans IC l'équation (E)

II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) .

On considère les points A, M et N d'affixes respectives :

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_M = e^{i\theta} + ie^{-i\theta}$ et $z_N = -ie^{-i\theta}$.

1) Déterminer la forme exponentielle de z_M .

2) Montrer que M décrit le segment [OA] privé des points O et A, lorsque θ varie.

3) Déterminer et construire l'ensemble γ des points N lorsque θ varie.

4) Soit H le point d'affixe $z_H = -\frac{z_M}{2}$.

a) Vérifier que $z_N - z_H = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) Montrer que H est le projeté orthogonal de N sur (OA).

c) Déterminer θ pour que l'aire du triangle OMN soit maximale.

Exercice 9:

1°) On considère, dans l'ensemble des nombres complexes , l'équation :

(E) : $z^2 + (\sqrt{3} + 7i)z - 4(3 - i\sqrt{3}) = 0$.

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que $Re(z_1) < Re(z_2)$.

a) Sans résoudre l'équation (E), Montrer que : $|z_1z_2| = 8\sqrt{3}$ et $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

b) M que $(\sqrt{3} - i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

c) Résoudre, dans £ , l'équation (E).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) , on donne les points A, B et C d'affixes respectives

a = -2i, b = $-\sqrt{3} - 3i$ et c = - 4i.

a)Déterminer la forme exponentielle de b.

b)Placer les points A, B et C.

c)Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$\arg(z + 2i) \equiv \frac{-2\pi}{3}[2\pi]$.

d) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z+4i}{z+2i}$ soit imaginaire.

Exercice 10:

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = (1 - x)e^{2x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1°) Dresser le tableau de variation de f.

2°)a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion I qu'on précisera.

b)Donner une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point I.

c)Tracer T et $\mathscr{C}$.

3)Calculer l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x= 1.

4°)On pose $I_n = \int_0^1 (1 - x)^n e^{2x}dx$; $\forall n > 0$, ∀n∈IN*

a)Mque ∀n∈IN*, on a : $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e^2}{1+n}$

En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

b)M que ∀n∈IN*, on a : $2I_{n+1} = -1 + (n + 1)I_n$.

En déduire.$\lim_{n\to+\infty} nI_n$

5°) Pour tout n∈IN*,$u_n = \frac{2^n}{n!}I_n$.

a)M par récurrence que ∀n∈IN*, on a : $\frac{2^{n-1}}{n!} \le 1$.

b)En déduire que ∀n∈IN*, on a : $u_n \le \frac{2e^2}{(n+1)}$.

a) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

6°)a)Mque ∀n∈IN*, on a : $u_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + u_n$.

b)En déduire que ∀n∈IN*, on a :

.$u_n = \frac{1}{2}\left[e^2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\right]$

c)En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$

Exercice 11 :

A)Soit la fonction f définie sur]-1, 1[par :

$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}dt$

1)a)Justifier l'existence de f.

b)Prouver qu'il existe trois réels α,β et φ tel que

$\forall t \in IR - [-1, 1\}$, $\frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\varphi}{1+t}$

c)Déduire que $\forall x\in]-1, 1[$, $f(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2)Etudier les variations de f et construire sa courbe C dans un repère orthonormé.

3)a)Montrer que $\forall x\in IR^*_+$ et $\forall k\in IN^*$ on a :

$\ln(x) \le -1 + \frac{x}{k} + \ln k$

b)Déduire que $\forall k\in IN^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+k} \ln x dx \le \ln k$.

et que $\forall n\in IN^* \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+n} \ln x dx \le \ln(n!)$

c)En déduire que $\forall n\in IN^*$,

$\ln(n!) \ge (n + \frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\ln 2$

4)Soit la suite u définie par sur IN* par :

$u_n = n + \ln(n!) - (n + \frac{1}{2})\ln(n)$

a)Montrer que $\forall n\in IN^*$, $u_n \ge \frac{1}{2}\ln 2$,

b)Vérifier que $\forall n \ge 1$, on a: $u_n - u_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

c)Déduire que la suite u est convergente.

B)Soit (v_n) la suite définie par :

$V_0 = \int_0^1 \sqrt{(1-x)}\,dx$ et $\forall n\in IN^*$, $V_n = \int_0^1 x^{n/2}\sqrt{1-x}dx$

1)Calculer v_0

2)a)Définir l'ensemble des points M(x,y) tel que $y^2 - x(1-x) = 0$.

b)Déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$

3)a)Prouver que la suite (v_n) est décroissante .

b)Déduire que la suite v est convergente.

4)a)Prouver par une intégration par partie que

$\forall n\in IN$, $v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}v_n$

b)Déduire que $\forall n\in IN$, $\frac{n+2}{n+5} \le \frac{v_{n+1}}{v_n} \le 1$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

Exercice 12 :

I/Soit x un réel de]-1, + ∞[, on pose $\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt$

1)a) $x\in IR_+$, mque, $0 \le \varepsilon(x) \le \frac{x^3}{3}$

b) $x\in]-1, 0]$, mque $\frac{x^3}{3(1+x)} \le \varepsilon \le 0$

c) En déduire que $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon(x)}{x^2} = 0$

2)a) Démontrer que pour tout x de]-1, +∞[

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)$

b)Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

3) Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur]-1, +∞[par $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & si\ x \ne 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

a) Mque f est continue et dérivable sur]-1, +∞[

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur]-1, +∞[par $h(x) = x - (x+1)\ln(1+x)$

En déduire le signe de h(x) pour $x\in]-1, +\infty[$

c)Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

II/ Soit $x \in]-1, 0]$ et $n \in IN^*$, on pose $\varepsilon_n = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$

1)Etudier le signe de $\varepsilon_n(x)$ suivant n est pair ou impair.

b)Etudier le signe de $\varepsilon_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$,

en déduire que $|\varepsilon_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$

2)a) Mque $\forall t \ne -1$

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$

b)En déduire que $\forall x$ de]-1, 0] et pour tout n de IN*

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\varepsilon_n(x)$

3) On considère la suite u définie par:

$u_n = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \cdots + \frac{1}{n2^{n-1}}\right]$

Trouver $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$

Exercice 13 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v). Soit $\alpha \in [0,\frac{\pi}{2}]$

1) Résoudre dans C l'équation :$z^2-2z+2=0$

2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = (1+i)e^{i\alpha}$ et $z_C = (1-i)e^{i\alpha}$.

a) Écrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) En déduire que le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

c) Pour quelle valeur de α le quadrilatère OABC est-il un parallélogramme ?

3) À tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que $z' = 2 + (z-2)^2$

On note C le cercle de centre K(2) et de rayon $\sqrt{2}$.

a) Déterminer z' pour $z = z_A$.

b) Soit M le point de C d'affixe $z = 2+\sqrt{2}\,e^{i\alpha}$

Montrer que l'affixe de M' est $2+2\,e^{i2\alpha}$

Déterminer et construire , l'ensemble des points M' lorsque α varie dans $[0,\frac{\pi}{2}]$

4) Soit N le point d'affixe $z_N = 2+\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ et N' le point associé à N.

a) Écrire $z_N - 2$ sous forme exponentielle; en déduire que N est un point de C .

b) Montrer que : $(\vec{u}, \overrightarrow{KN'}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

c) Placer N sur la figure puis construire le point N'.

Exercice 14 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$) .

1) a)Montrer que f est définie sur [1, + ∞[.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement.

2) a. Montrer que f est dérivable sur]1, +∞[et que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

b)Dresser le tableau de variation de f.

3) a. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b. Tracer la courbe (C).

4) a. Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe (C ') de sa fonction réciproque f^{-1} .

b)Montrer que pour tout $x\in IR_+$, $f^{-1}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

5) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives: x = 1 et x = 2.

Exercice 15 :

On considère la suite définie sur IN* par

$u_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$.

1) a) Montrer que pour tout n∈IN*, $u_n \geq 0$.

b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties, calculer u_1.

b) Montrer que pour tout n∈IN*,

$u_{n+1}-(n+1)u_n = \frac{-1}{e}$

c) En déduire la valeur de u_2.

3) a) Montrer que pour tout n∈IN* , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 16:

1) Soit h la fonction définie sur]0,+∞[par :

h(x)=aln²(x)+blnx ; a et b deux réels.

Déterminer les réels a et b sachant que h admet un minimum en $e^{\frac{1}{2}}$ égale à $(\frac{-1}{4})$.

2) Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par :

$f(x) = \ln^2 x - \ln x$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (o,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$).

a- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b- Montrer que tout $x\in]0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{-1+2\ln x}{x}$.

c- Dresser le tableau de variation de f.

d- Préciser les points d'intersection de c avec l'axe des abscisses.

e- Tracer la courbe c.

(On précisera les branches infinies).

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0, e^{\frac{1}{2}}]$.

a- Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g.

b- Montrer que l'équation g(x) = x admet dans I une unique solution α et que α ∈]0,1] .

c- Tracer la courbe c' de g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

d- Montrer que tout x ∈ J ; $g^{-1}(x) = e^{\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}$.

4) Soit A=$\int_\alpha^1 f(x)dx$..

a- Interpréter graphiquement A

b- Calculer A.

c- En déduire la valeur de K=$\int_0^\alpha e^{-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}dx$.

Exercice :17

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1°) Montrer que OBAC est un losange.

2°)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f(B) = A.

a)Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b)Montrer que. $f = R_{(O,\frac{-\pi}{3})} o S_{AB}$

b)Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{(o,\frac{\pi}{3})} o t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{BC} o S_{AC} o S_{AB}$.

a)Montrer que $S_{AC} o S_{AB} = S_{AO} o S_{AC}$.

En déduire que $\varphi = S_{IK} o S_{IJ} o S_{AC}$ où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).

b)Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

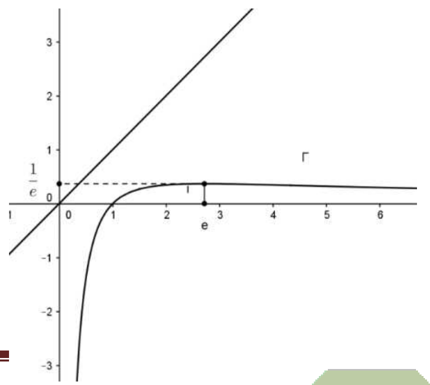
4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.
a)Montrer que g fixe le point O.
b)Montrer que g([BC]) = [BC].
c)Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice 18 :
Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O,$\vec{u}$, $\vec{v}$) . Soit A(i) et B(i+1).
On considère l'application
f:P\{A}$\rightarrow$P :M(z) $\rightarrow$M'(z') tel que z'- i = $\frac{2}{\bar{z}+i}$.
1)Montrer que les points A, M et M' sont alignés.
2)Déterminer l'ensemble ζ des points invariants par f
3)Dans cette question, on suppose que z=1+i+$e^{i\theta}$
a)Déterminer et construire l'ensemble Γ décrit par le point M d'affixe z lorsque θ décrit $]\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}[$
b)Montrer que z'- i=1+i tan $\frac{\theta}{2}$.
c)En déduire l'ensemble Γ' image de Γ par f.
Le construire.

Exercice 19 : (5 points)
Soit F la fonction définie sur [0, +∞[par :
F(x)=$\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$ si x > 0 et F(0) = -ln2
1°)a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x > 0,
F(x)= $\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.
b) Montrer que pour tout réel x > 0,
$e^x ln2 \leq \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x}ln2$
c) Calculer $\lim_{x\to0+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.
En déduire que F est continue à droite en 0.
2°)a) Montrer que pour tout réel x > 0,F(x)≤ $\frac{-e^x+1}{2x}$
b) En déduire $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$
3°) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et pour tout réel x > 0, F'(x) = $\frac{-1}{2}(\frac{e^x-1}{x})^2$
4°) Soit x un réel strictement positif.
a) Montrer qu'il existe un réel c de]0 , x[tel que F(x) - F(0) = $xF'(c)$
b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.
c) Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative.

Exercice 20:
I/ On considère la fonction f définie sur] 0 , +∞ [par
f (x) = $\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$
et on désigne par ζ_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé ($O,\vec{i},\vec{j}$).
1) a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Tracer ζ_f .
2) Calculer l'aire de la région du plan limité par la courbe ζ_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = $\frac{1}{e}$; x = 1 .
II/ On pose pour tout n∈ IN* ,
$I_n=\frac{1}{2^{n+1}n!}\int_{\frac{1}{e}}^1\frac{(lnx)^n}{x\sqrt{x}}dx$
1) a) Calculer I_1.
b) Mque $\forall n>0;\ |I_n|\leq\frac{1}{n!2^n}$
c)Calculer la limite de I_n .
2) En intégrant par partie, montrer que pour tout n de IN* on a $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{e}}{(n+1)!2^{n+1}}$
3) a) Montrer que pour tout n de IN*,
$I_n = -1+\sqrt{e}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!2^k}$
b) En déduire la limite de la somme :
$S_n = 1-\frac{1}{1!2}+\frac{1}{1!2^2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!2^n}$

Exercice 21 : (6 points)
Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par :
$f(x)=x-\frac{lnx}{x}$
On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé.
1) a) Calculer $\lim_{x\to0+}f(x)$; $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)-x$
b) En déduire que la courbe C admet deux asymptotes que l'on précisera.
c) Etudier la position de C par rapport à la droite Δ : y = x.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) a) Montrer que C admet une unique tangente D parallèle à Δ. Préciser les coordonnées du point de contact B.
b) Donner une équation de D.
4) Dans la figure ci dessous, On a tracé la droite Δ : y = x et la courbe Γ : $y=\frac{lnx}{x}$
a) Construire le point A($\frac{1}{e}$,0) et vérifier que A appartient à D.
b) Tracer la droite D et placer le point B.
c) Tracer C.
5) Calculer l'aire de la partie du



plan limitée par C, la droite Δ et les droites d'équations : $x = \frac{1}{e}$ et x = e

Exercice : 22

Soit f la fonction définie sur $]-ln2\,,+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^{x}-1}}$ **et** g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = - ln (1+ sin x) .

1) a)Dresser le tableau de variations de g

b)Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]-ln2,+\infty[$

c)Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-ln2,+\infty[$ et que $(g^{-1})'(x)$ = f(x)

2). Pour n∈ IN* et x ≥ 0 , on pose

$F_n(x)= \int_0^x (f(t))^{2n}\,dt$

a)Donner le sens de variations de F_n

b)Calculer F_1(x) et montrer que $\lim_{x\to+\infty} F_1(x)$= ln2

c)Mque pour tout réel t ≥ 0 ; $-e^{\frac{-t}{2}} \le f(t) \le 0$

d)En déduire que $F_n(x) \le \frac{1}{n}$ et que $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ est finie.

3. On pose $U_n= \lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.

<u>On se propose dans la suite de déterminer</u> U_n.

a)Mque $F_{n+1}(x) + F_n(x) = -\frac{1}{n}\ [(f(x))^{2n} - 1]$

b) En déduire que $U_{n+1} + U_n= \frac{1}{n}$

5. On pose $W_n = (-1)^n U_n$; n ∈ IN*.

Vérifier que : $W_{n+1} - W_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

En déduire que pour n ≥ 2 ;

$u_n = (-1)^n\left[-ln2 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right]$.

Exercice 23: (5 points)

Soit f la fonction définie sur [0, +∞[par $f(t) = t\,e^{-t}$

1) a) Dresser le tableau de variations de f.
En déduire que f est bornée.

b) Montrer alors que pour tout réel t ≥ 0 , on a: $f(t)e^{\frac{t}{2}} \le 1$.

2) Pour tout entier n ≥ 1, on note F_n la fonction définie sur [0, +∞[par

$F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n\,dt$.

a) Prouver que $[f(t)]^n \le e^{-\frac{t}{2}}$. On pourra utiliser la question 1).

b) En déduire que, pour tout x ≥ 0, $F_n(x) \le 2$.

c) Prouver alors que F_n(x) admet une limite finie quand x tend vers +∞.

3) Pour tout entier n ≥ 1, on définie la fonction G_n sur [0, +∞[par $G_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$.

a) Expliciter G_1(x) .

b) Montrer que $G_{n+1}(x) = (n+1)\,G_n(x) - x^{n+1}e^{-x}$.

c) En déduire, en raisonnant par récurrence, que $\lim_{x\to+\infty} G_n(x) = n\,!$.

4) a) Montrer que $(G_n)'(nx) = n^n\,[f(x)]^n$.

b) Prouver alors que $F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}}\,G_n(nx)$.

En déduire $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.

Exercice 24 (2,5points)

Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$par :

$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^4}}$.

1) Soit F la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par :

$F(x) = H(\sqrt{\sin(2x)})$

où H la primitive de f qui s'annule en 0.

a)M que F est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer F' (x)

b) En déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $F(x) = x - \frac{1}{2}\tan(x)$.

c)Déterminer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(t)dt$

2) Pour tout x∈$[-1,1]\setminus\{0\}$ on pose :

$G(x) = \int_x^{2x}\frac{1}{f(t)}dt$. Etudier la parité de G

Exercice :25 (3,5points)

On se propose de résoudre dans IN l'équation

$(E): x^{53} \equiv 3 (\text{mod } 37)$

1) Soit x solutions de (E)

a) Montrer que x et 37 sont premiers entre eux.

b) Montrer que :

$x^{36} \equiv 1(\text{mod } 37)$ et que $x \equiv 3^{17}(\text{mod } 37)$

2)a) Soit x ∈ IN

M que si $x \equiv 3^{17}(\text{mod } 37)$alors x est solution de (E)

b) En déduire que l'ensemble des solutions de (E)dans IN est $\{37k + 25; k \in N\}$

3) Soit x une solution de (E).

On pose $S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{52}$

a) Vérifier que $(x-1)S = x^{53} - 1$

En déduire que $12S \equiv 1(\text{mod } 37)$

b) Déterminer alors le reste modulo 37 de S

Exercice : 26 (4points)

Soit la fonction f définie sur IR+ par

$f(x) = \ln\left(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j) du plan.

1a) Montrer que : $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur IR*+ et que $\forall$ x >0, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f construire C_f .

2)a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie IR+.

b) Soit x $\in$IR*+. Résoudre dans IR+ l'équation en y : $e^y + e^{-y} - 2 = x$.

Expliciter alors $g(x)$ pour x $\in$IR+.

3) Soit h une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I.

a) Montrer que h^{-1} admet des primitives sur $h(I)$.

b) Soit α et β deux réels de I.

Montrer que $\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} th'(t)dt$.

4)a) Calculer $f(0)$ et $f\left(\frac{(e-1)^2}{e}\right)$.

b)On désigne par A l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droite d'équations $x = 0$, $x = \frac{(e-1)^2}{e}$ et $y = 0$. Montrer que A $= \frac{2}{e}(u.a)$

<u>Exercice :27</u>

On considère la suite U définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \quad ; \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Montrer que pour tout n$\in$IN, $U_n \geq n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

2/ Soit W la suite définie sur IN* par $W_n = U_n^2 - U_{n+1}.U_{n-1}$

a/ Montrer que W est une suite géométrique de raison (-1)

b/ En déduire que pour tout n$\in$IN*, $U_n^2 - U_{n+1}.U_{n-1} = (-1)^n$

3/ On considère la suite V de terme général $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

a/ Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(V_{n+1} - V_n) = 0$

b/ Etablir l'égalité : $V_{n+1} - V_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{U_{n+1}.U_{n-1}}$, et en déduire la monotonie de la suite (V_{2n}) et celle de la suite (V_{2n+1}) .

c/ Montrer que pour tout n$\in$IN, $V_{2n} \leq V_{2n+1}$

d/ En déduire que les suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont convergentes et quelles convergent vers la même limite.

e/ En déduire que la suite (V_n) est convergente puis déterminer sa limite.

<u>Exercice :28(6points)</u>

1)Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 - x + x\ln x$.

a)Etudier les variations de g .

b) En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $1 + x\ln x \geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+xlnx} \; si \; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé(O, i, j).

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

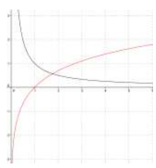
b) Montrer que $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-1}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

c)Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

3)a)Mque pour tout $x \in]0,+\infty[$ $f'(x) = \frac{1+lnx}{(1+xlnx)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Dans la **figure ci dessous**, on a tracé dans un repère orthonormé (O, i, j), les courbes C_1 et C_2 des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ respectivement par $x \longmapsto lnx$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.



La musique est une mathématique sonore,
la mathématique est une musique silencieuse. Edouard Herriot

a) Construire le point A de C_1 d'abscisse $\frac{1}{e}$ et le point B de C_2 d'abscisse $1-\frac{1}{e}$.

En déduire une construction du point C de Cf d'abscisse $\frac{1}{e}$

b) Déduire de la question **1-b)** que pour tout x >0 , $f(x) \le \frac{1}{x}$.

Déterminer alors la position relative de Cf et C_2

c) Tracer la courbe C_f .

5) On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

a) que pour tout $t \in [1,+\infty[$,$\frac{1}{t+tlnt} \le f(t)$.

b) Montrer alors que pour tout $x \in]0,+\infty[$,$\ln(1+lnx) \le F(x) \le lnx$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.

6) Soit n un entier naturel non nul ;

a) Montrer que la fonction $h: x \mapsto x-F(x)$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

b) En déduire que l'équation $h(x)=n$ admet dans $[1,+\infty[$ une seule solution α_n.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

d) Vérifier que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1-\frac{F(\alpha_n)}{n}}$.

Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.

__Exercice:29__

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, u, v) Soient les points A et B du plan d'affixes respectives z1 et z2 tels que O, A et B ne sont pas alignés. On considère le point M d'affixe z vérifiant la relation : $z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

I/ 1) Montrer que : $\frac{z_2-z}{z_1-z} = -\frac{z_2}{z_1}$

2) Montrer que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})[2\pi]$

3) En déduire que M appartient au cercle C circonscrit au triangle OAB.

II) On suppose de plus que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation :

$(E_\theta): z^2-2(e^{i\theta}+1)z+2e^{i\theta}-2=0, \theta\epsilon]0,\pi[$.

1)a) Montrer que $z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$.

b) Donner la forme algébrique de z .

c) Déterminer alors l'ensemble des points M lorsque θ décrit]0, π[.

Pour la suite on prendra $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

On pose $Z_1=e^{i\frac{\pi}{12}}z_1$ et $Z_2=e^{i\frac{\pi}{12}}z_2$. z_1 et z_2 sont les solutions $(E_{\frac{2\pi}{3}})$

On désigne par A' , B' et C' les points d'affixes respectives Z_1 , Z_2 et $Z_{M'}=e^{i\frac{\pi}{12}}z_M$.

3)a) Soit K et K' les milieux respectifs des segments [AB] et [A'B'].

Vérifier que $z_K=e^{i\frac{\pi}{3}} et\ z_{K'}=e^{i\frac{\pi}{12}}$.

b) En remarquant que $(Z_2-Z_1)^2=(Z_2+Z_1)^2-4Z_1Z_2$, vérifier que $(Z_2-Z_1)^2=4((Z_{K'})^2\left(i\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^2$.

c) Montrer que $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{K'E})+(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{K'F}) \equiv 0\ [\pi]$ où E et F sont les points d'affixes $Z_F=-Z_E$.

En déduire que la droite (A'B') porte la bissectrice intérieure de l'angle EK'F.