Fiche de cours 4ème Maths

Dérivabilités

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ tel que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$ ou encore $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$

Le réel ℓ , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a , il noté $f'(a)$

(*) Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ une tangente T d'équation : $y = f'(a)\ (x-a) + f(a)$

Le vecteur directeur de cette tangente : est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(a)\end{pmatrix}$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^3$. Montrer que f est dérivable en a où a est réel quelconque.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x^2+a^2+ax)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x^2+a^2+ax)=3a^2$

alors f est dérivable en a et on a : $f'(a)=3a^2$

Définition 2

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme :]a-h , a] (h >0)

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un nombre réel ℓ' tel que : $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell'$

ou encore $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell'$

Le réel ℓ' , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a , il noté $f'_g(a)$.

Définition 3

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : [a , h+a[(h>0)

On dit que f est dérivable à droite en x_0 s'il existe un nombre réel ℓ'' tel que : $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell''$

ou encore $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell''$

Le réel ℓ'' , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à droite en a , il noté $f'_d(a)$

Conséquences :

1°) f est dérivable en a si et seulement si $f'_g(a)=f'_d(a)$ nombre fini

2°)Si f est dérivable à droite de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ une demi tangente T_d d'équation : $T_d : y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$ et $x\geq a$

3°)Si f est dérivable à gauche de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ une demi tangente T_g d'équation : $T_g : y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$ et $x\leq a$

Interprétation graphiques : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ ou encore $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$

Si :	**Interprétation graphique :**
$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	C_f admet en point $M(a,f(a))$ un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = a$ et $y \geq f(a)$
$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	alors C_f admet en point $M(a,f(a))$ un demi tangente verticale dirigé vers le bas d'équation : $x = a$ et $y \leq f(a)$

Exemple :
Etudier la dérivabilité de f à droite de point d'abscisse $x = 0$ et interpréter la résultat tel que : $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

alors la courbe alors C_f admet en point $M(0,0)$ un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = 0$ et $y \geq 0$

Approximation affine :
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
Si f est dérivable en a, alors : $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h$
On dit que $f(a)+f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$, pour h voisin de zéro.

Exemple :
Trouver une valeur approchée de $(3.98)^3$
Soit $f : x \mapsto x^3$, $a = 4$ et $h = -0.02$ alors $f(4-0.02) \approx f(4) - \frac{2f'(4)}{100}$ alors $(3.98)^3 \approx 63{,}04$
(le calculatrice donne : $63{,}044792$)

Fonction composée
Si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle $J \subset f(I)$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a pour tout x de I : $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x)$

Théorème de Rolle
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b] et vérifiant f(a) = f(b) .
Si f est dérivable sur]a,b[alors il existe au moins un élément x_0 de]a,b[tel que : $f'(x_0) = 0$.

Théorème des accroissements finis
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b] et dérivable sur]a,b[.
Alors il existe au moins un élément x_0 de]a,b[tel que : $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Sens de variation
Soit f une fonction continue sur [a,b] et dérivable sue]a,b[
Si $f'(x) \geq 0$ sur]a,b[alors f est croissante sur [a,b]
Si $f'(x) > 0$ sur]a,b[alors f est strictement croissante sur [a,b]
Si $f'(x) \leq 0$ sur]a,b[alors f est décroissante sur [a,b]
Si $f'(x) < 0$ sur]a,b[alors f est strictement décroissante sur [a,b]
Si $f'(x) = 0$ sur]a,b[alors f est constante sur [a,b]

Inégalités des accroissements finis
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b] et dérivable sur]a,b[.
Si : existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout x de]a,b[
On a alors : $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$
Si pour tout x de]a,b[: $|f'(x)| \leq k$ alors $|f(b)-f(x)| \leq k|b-a|$

Point d'inflexion

Soit x_0 un réel et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0. Si f'' s'annule en x_0, en changeant de signe, alors le point $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

Tableau de dérivé :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
f(x)= k (constante)	$f'(x) = 0$	R
f(x)= x	$f'(x) = 1$	R
f(x)=ax+b	$f'(x) = a$	R
$f(x) = x^n \ (n \in Z^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	R si n>0 ; R^* si n <0
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	R^*_+
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	R^*
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	R
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	R
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$R - \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in Z\right\}$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a\sin(ax+b)$	R
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x) = a\cos(ax+b)$	R
$f(x)=\tan(ax+b)$	$f'(x) = a(1 + \tan^2(ax+b))$	$R - \left\{k\frac{\frac{\pi}{2} - b}{a}; k \in Z\right\}$

Opérations sur les derives

Lorsque u et v sont des fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Dérivée	Conditions
u + v	u' + v'	
k.u (k =constante)	k.u'	
u.v	u'.v + u.v'	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$u^n \ (n \in Z^*)$	$n.u'.u^{n-1}$	$u > 0$ sur I si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$	

Séries d'exercices *$4^{ème}$ Maths*

Dérivabilités

EXERCICE N°1

On définit la fonction f de période 1 en donnant sur $[0,1[$: $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$.

f-est-elle dérivable sur R ?

EXERCICE N°2

Comparer, sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0.9\tan x$ et $\tan(0.9x)$

EXERCICE N°3

Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, il existe un réel $c \in]p, p+1[$ tel que : $\cos(p+1) = \cos p - \sin c$

EXERCICE N°4

Montrer que :

1°)Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$

2°) Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $x \le \tan x \le \frac{4}{\pi}x$

3°) Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $1 - \frac{2}{\pi}x \le \cos x \le \frac{\pi}{2} - x$

4°) Pour tout x de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $\frac{\pi}{2} - 2x \le \cot an(x) - 1 \le \frac{\pi}{4} - x$

5°) Pour tout x>0 : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \le \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6°)Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{12} \le \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \le \frac{\sqrt{3}}{12}$ Indication: $f : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sin(x)$

EXERCICE N°5

Montrer que : pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $2\sin x + \tan x \ge 3x$

EXERCICE N°6

Soit a>0. Pour tout n de N* :

On considère la fonction polynômiale P_n définie par la relation: $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - a$.

1°) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution positive et une seule, que l'on notera x_n.

Montrer que $x_n < a$.

2°) Etudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\ge1}$ est monotone.

3°) Montrer que la suite $(x_n)_{n\ge1}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

Prouver que $0 \le \ell < 1$.

4°) Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul n le nombre x_n est solution de l'équation:

$x^{n+1} - (a+1)x + a = 0$. En déduire que: $\ell = \frac{a}{a+1}$.

EXERCICE N°7

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$\forall x \in \mathbb{R}^+ : f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1) a)Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.

b)Calculer u_1 et u_2.

c)Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$

2) a) Montrer que, pour tout x élément de $]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

b)En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).

c)Montrer que la suite (u_n)est convergente. On note ℓ sa limite.

3) a)Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b)Donner enfin la valeur de ℓ.

EXERCICE N°8

Soit f une fonction infiniment dérivable sur R(ie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur R)

Telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall x \in \mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x) = a_n f(x + b_n)$.

1°)Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique.

2°)Calculer a_n et b_n en fonction de n, a_1 et b_1 .

3°)Trouver un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses ci-dessus.

EXERCICE N°9 : Soient f et g deux fonctions continues sur un fermé $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, telles que : $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$. $(a < b)$

1°)Montrer que qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que : $f(x_0) = g(x_0)$.

2°) Montrer que qu'il existe $x_1 \in]a, b[$ tel que : $f'(x_1) = -g'(x_1)$.

EXERCICE N°10

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, $(a < b)$.

On suppose que $\forall x \in]a, b[\ : g'(x) \neq 0$.

1°)Montrer que l'on a : $g(a) \neq g(b)$.

2°)Soit la fonction h définie sur $[a, b]$ par : $h(x) = f(x) - f(a) - \omega(g(x) - g(a))$ où $\omega \in \mathbb{R}$

Calculer ω pour que l'on ait $h(b) = 0$.

3°)La valeur de ω étant celle de 2°), prouver que : $\exists c \in]a, b[/ \ \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

4°)En déduire que : Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.

5°)Appliquer le résultat pour calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

EXERCICE N°11

Soit f une fonction deux fois dérivable sur R.

1°)Montrer que : si f est paire alors $\exists a \in \mathbb{R} /\ f'(a) = 0$

2°)Montrer que : si f est impaire alors $\exists b \in \mathbb{R} /\ f''(b) = 0$.

EXERCICE N°12

On donne un réel t>0. Soit la fonction $f_n : x \mapsto x^n - t(1 - x)$

1°)Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation : $f_n(x) = 0$ admet une solution et une seule comprise entre 0 et 1. Soit u_n cette racine.

2°)Montrer que , pour tout n de N* : $f_{n+1}(u_n) = -t(1 - u_n)^2$

3°)En déduire que (u_n) est croissante.

4°)En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.