Dérivabilité

QUESTION

Etudier la dérivabilité de f en x_0.

REPONSE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \left.\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right\} \text{non dérivable} \\ \\ f'(x_0) \in \mathbb{R} \quad \text{dérivable} \end{cases}$$

$\boxed{f'(x_0) = 0}$

$\boxed{f'(x_0) > 0}$

$\boxed{f'(x_0) < 0}$

$$\lim_{x \to x_0^{\boxed{+}}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \boxed{+}\infty \\ \boxed{-}\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^{\boxed{-}}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \boxed{+}\infty \\ \boxed{-}\infty \end{cases}$$

Tangente

$$\boxed{T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

$T_a \parallel \Delta : y = \alpha x + \beta \Rightarrow \boxed{f'(a) = \alpha}$

$T_a \perp \Delta : y = \alpha x + \beta \Rightarrow \boxed{f'(a) \times \alpha = -1}$

Approximation affine

$$\boxed{f(a+h) \simeq f(a) + h\, f'(a)}$$

avec h : voisinage de 0

QUESTION

Donner une valeur approchée de

REPONSE

$$f(1{,}999) = f(2 \overbrace{-\,0{,}001}^{h})$$

$$\simeq f(2) + (-0{,}001)\, f'(2)$$

Sens de variation

QUESTION

Déterminer les variation de f sur I.

REPONSE

Si $\forall x \in I$

- $\boxed{f'(x) = 0} \Leftrightarrow f$ est $\boxed{\text{constante}}$
- $\boxed{f'(x) > 0} \Leftrightarrow f$ $\boxed{\text{est croissante}}$
- $\boxed{f'(x) < 0} \Leftrightarrow f$ est $\boxed{\text{décroissante}}$

Dérivés successives

f' est la dérivée première

$f'' = f^{(2)}$ est la dérivée seconde

$f''' = f^{(3)}$

Exp : $f(x) = x^4 + x^2 - 2$

$f'(x) = 4x^3 + 2x \quad , \quad f''(x) = 12x^2 + 2$

$f^{(3)}(x$ [illegible] $^{(4)}(x) = 2$

Dérivés

$$\boxed{(U \cdot V)' = U'V + UV'}$$

$$\boxed{\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}}$$

$$\boxed{(U^n)' = n\,U^{n-1}\,U'}$$

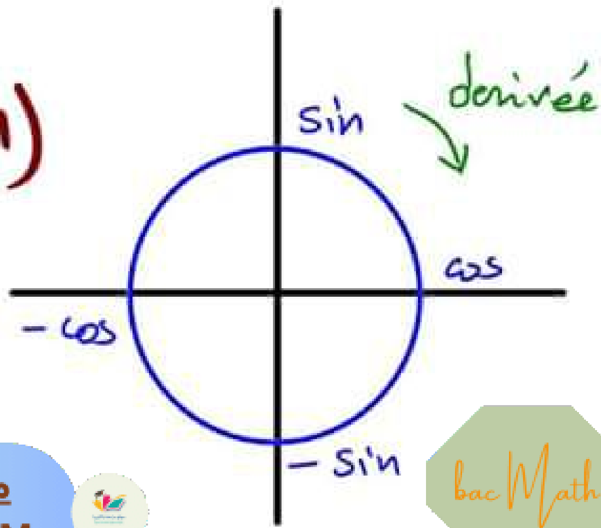
$$\boxed{(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}}$$

$$\boxed{(\tan x)' = 1 + \tan^2 x}$$

$$\boxed{(U \circ V)' = V' \times U'(V)}$$

$$h(x) = \cos(3x^2+1)$$

$$h'(x) = -6x \sin(3x^2+1)$$



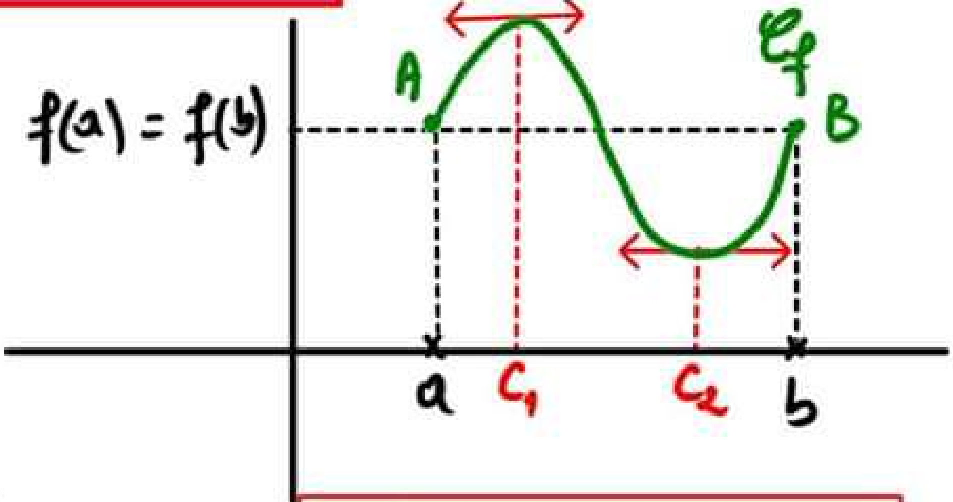
QUESTION

Montrer que $f \circ g$ est dérivable sur I

REPONSE

- g est dérivable sur I
- f est dérivable sur J
- $g(I) \subseteq J$ soit $(g(x) \in J)$

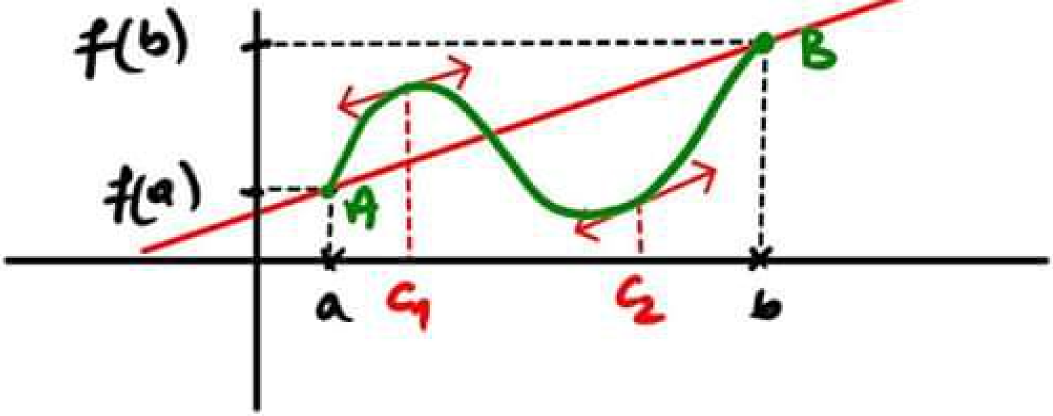
Théorème de Rolle



- f est $\boxed{\text{continue sur } [a,b]}$
- f est $\boxed{\text{dérivable sur }]a,b[}$
- $\boxed{f(a) = f(b)}$

Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

Théorème des accroissements finis



f est continue sur $[a,b]$

f est dérivable sur $]a,b[$

Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $\boxed{f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

QUESTION Montrer que $f'(x)=3$ admet une solution $\alpha \in]a,b[$

REPONSE f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 3$$

Inégalité des accroissement finis

- f est $\boxed{\text{continue sur } [a,b]}$
- f est $\boxed{\text{dérivable sur }]a,b[}$
- Il existe deux réels m et M

  tel que $\forall x \in]a,b[$: $\boxed{m \leq f'(x) \leq M}$

Alors

$$\boxed{m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)}$$

Corollaire :

- f est dérivable sur I
- $\forall x \in I$: $|f'(x)| \leq k$

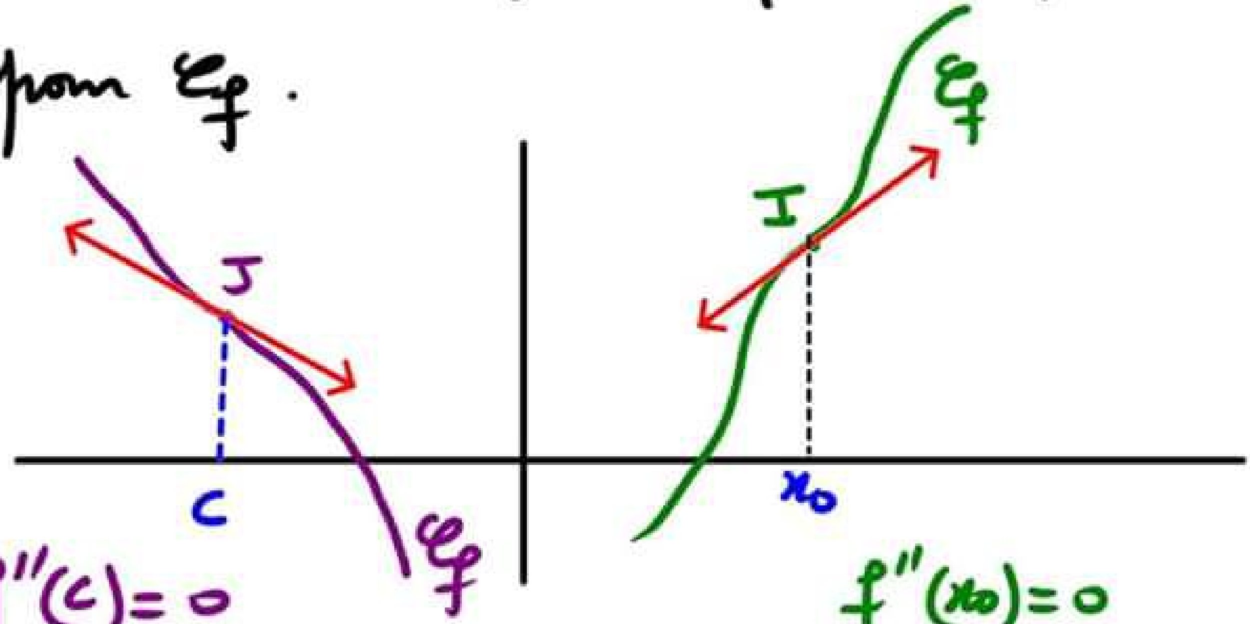
Alors $\forall a,b \in I$ on a :

$$\boxed{|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|}$$

(Important dans les suites réelles)

Point d'inflexin

f'' s'annule et change de signe en x_0
donc $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion
pour $\mathcal{C}_f$.



$f''(c) = 0$ $\qquad\qquad$ $f''(x_0) = 0$

x	$-\infty$		c		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
Position		$\mathcal{C}_f$ T	J	T $\mathcal{C}_f$	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Position		T $\mathcal{C}_f$	I	$\mathcal{C}_f$ T	