

La fonction réciproque

Propriété:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $f(I)$ vers l'intervalle I

Résultats:

- $\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases}$
- $(\forall x \in I); (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$
- $(\forall y \in f(I)); (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$

Détermination de la formule de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Soit x un élément de l'intervalle $f(I)$ et y un élément de l'intervalle I

En utilisant l'équivalence suivante : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$ et en cherchant y en fonction de x on trouve ainsi la formule de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$

Continuité de la fonction réciproque:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, de même sens de monotonie que f

Dérivabilité de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Soit x_0 un élément de l'intervalle $f(I)$ et $y_0 = f(x_0)$

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$

Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et on a : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Si f est dérivable sur l'intervalle I et sa fonction dérivée f' ne s'annule pas sur cet intervalle I

Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$

Et on a : $(\forall x \in f(I)); (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

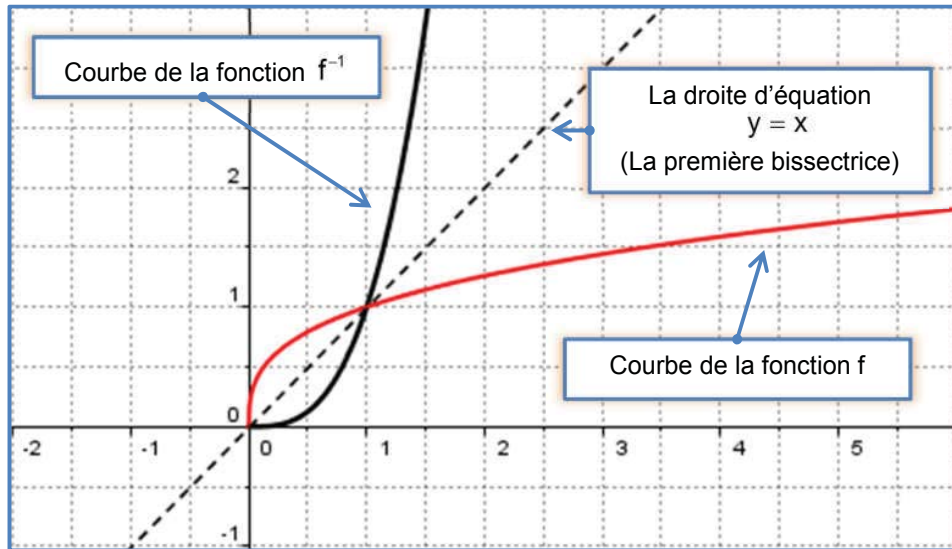
Monotonie de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

La fonction réciproque f^{-1} est aussi strictement monotone et de même monotonie que la fonction f

La représentation graphique de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
 Les représentations graphiques des fonctions f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétrique par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation : $y = x$) du repère.



Remarques importantes:

La courbe (C_f)	→	La courbe ($C_{f^{-1}}$)
$A(a;b) \in (C_f)$		$A'(b;a) \in (C_{f^{-1}})$
Admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$		Admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$
Admet une asymptote horizontale d'équation : $y = b$		Admet une asymptote verticale d'équation : $x = b$
Admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$		Admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ (qu'on détermine à partir de la relation $x = ay + b$)
Admet une tangente (ou une demi-tangente) verticale		Admet une tangente (ou une demi-tangente) horizontale
Admet une tangente (ou une demi-tangente) horizontale		Admet une tangente (ou une demi-tangente) verticale