Primitive

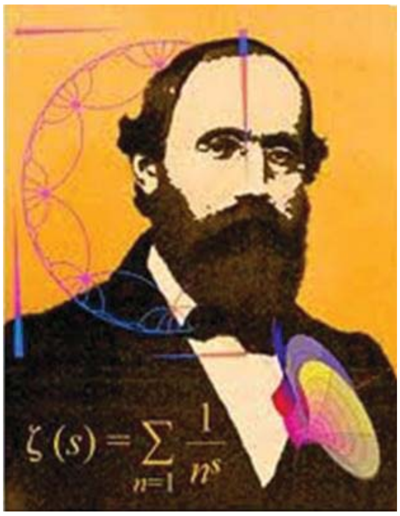
MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Primitives

Henri-Léon Lebesgue

(28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée initialement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à l'Université de Nancy en 1902. Il fut l'un des grands mathématiciens français de la première moitié du vingtième siècle.



Bernhard Riemann

(**allemand, 1826-1866**) Ce très grand mathématicien, élève de Gauss à Göttingen de Jacobi à Königsberg et de Dirichlet à Berlin, fut professeur en la célèbre université de Göttingen, succédant à ce dernier en 1859 (Dirichlet avait lui-même succédé à Gauss quatre ans plus tôt). Riemann mourut prématurément, atteint de tuberculose à Selesca (lac Majeur, Italie) où il se soignai.

RESUME DU COURS

1°) Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.

F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

Théorème1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème 2

Si une fonction f admet une fonction primitive F sur un intervalle I alors f admet une infinité de fonctions primitives sur I et qui sont toutes de la forme F + c où c désigne une constante réelle arbitraire. C'est-à-dire l'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est $\{F + c\ ;\ c \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 3

Etant donnés un intervalle I, un réel a de I et un réel b.

Toute fonction f continue sur I admet une unique fonction primitive F sur I telle que $F(a) = b$.

2°) Opérations sur les fonctions primitives

Théorème 4

Etant donnés deux fonctions continues f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et deux réels α et β.

Si F et G sont respectivement deux fonctions primitives de f et g sur I alors $(\alpha.F + \beta.G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha.f + \beta.g)$ sur I.

3°) Fonctions primitives des fonctions usuelles

I est intervalle de	Fonction f définie sur I par	Fonctions primitives F de f définies sur I par
$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$; $(a \in \mathbb{R})$.	$x \mapsto ax + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^n$; $(n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto x^n$; $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^*_+$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \operatorname{tg} x + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\operatorname{cotg} x + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(ax+b)$ $(a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R})$.	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(ax+b)$; $(a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R})$.	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$; $(c \in \mathbb{R})$.

$\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}$ tel que $ax+b=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$x\mapsto 1+\tan^2(ax+b)$; $(a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R})$.	$x\mapsto \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}$ tel que $ax+b=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}\}$	$x\mapsto (1+\cot an^2(ax+b))$ $(a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R})$.	$x\mapsto -\frac{1}{a}\cot an(ax+b)+c$; $(c\in\mathbb{R})$.

4°) Fonctions primitives des fonctions usuelles

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que :	Fonction f	Fonctions primitives F de f sur I
u et v deux fonctions dérivables sur I.	$u'+v'$	$u+v+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable sur I.	au' ; a réel.	$au+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u et v deux fonctions dérivables sur I.	$u'.v+v'.u$	$(uv)+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I.	$u'.u^n$; $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'}{u^n}$; $n\in\mathbb{N}-\{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et strictement positive sur I.	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et positive sur I.	$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u et v deux fonctions dérivables sur I et v ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$	$\frac{u}{v}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u et v deux fonctions telles que vou soit dérivable sur I.	$(v'\circ u).u'$	$(v\circ u)+c$; $(c\in\mathbb{R})$.