Primitives

On note par , I : un intervalle de R et f une fonction définie sur I

Définition :

Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que : pour tout x de I on a : $F'(x) = f(x)$

Théorème 1

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I

Théorème 2

Soit f une fonction continue sur I, alors f admet une infinité de primitives sur I et si F est l'une d'entres elles, toute autre primitive G de f sur I est définie par : G(x) = F(x) + constante

Théorème 3

Soit f une fonction continue sur I. x_0 est un réel donné de I et y_0 est un réel donné.
Alors il existe un primitive G de f sur I et une seule telle que $G(x_0) = y_0$

Théorème 4

F et G sont des primitives respectives de f et g sur I, alors :aF+ bG est une primitive de af + bg sur I

Primitives des fonctions usuelles

F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et a , ω, ϕ des réels avec $\omega \neq 0$

f	I	F
$x \mapsto a$	R	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n, n \in N^*$	R	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in N^* - \{1\}$	$]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$	$x \mapsto \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	R	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	R	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \sin(\omega x + \phi)$	R	$x \mapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \phi) + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \phi)$	R	$x \mapsto \frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \phi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$x \mapsto \tan x + c$

Calcul de primitives

F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et u et v deux fonctions dérivable sur I.

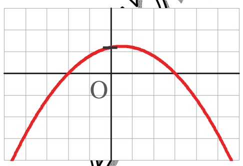
Séries d'exercices — 4ème Maths

Primitives

EXERCICE N°1

La parabole ci-contre est la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f dans un repère orthogonal.

($\|\vec{i}\| = 1$; $\|\vec{j}\| = 5$)



Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une courbe ne représente pas une primitive de la fonction f . Laquelle ? (justifier la réponse)

Figure 1

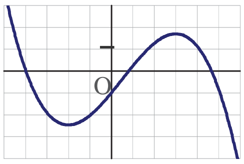


Figure 2

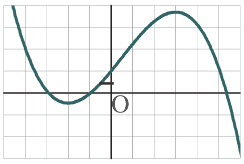
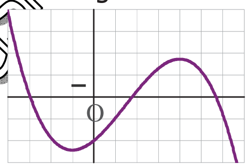


Figure 3



EXERCICE N°2

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

1°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; I = R

2°) $f : x \mapsto (2x+1)(x^2+x+1)$; I = R

3°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

4°) $f : x \mapsto (2x+1)\sin(x^2+x+1)$; I = R

5°) $f : x \mapsto \sin x + x\cos x$; I = R

6°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; I =]-1,1[

7°) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $I =]0,\pi[$

8°) $f : x \mapsto \cos x.\cos 2x$; I = R

9°) $f : x \mapsto \dfrac{x\cos x + \sin x}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$

10°) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; $I =]-2,0[$

EXERCICE N°3

1°)Déterminer trois réels a, b et c tels que : $x^2 = a.(x-1)^2 + b.(x-1) + c$.

2°) En déduire les primitives de f sur R tel que $f(x) = x^2(x-1)^{2009}$

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie sur R par : f(x) = x.cos x.

1°)Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur R par : g(x) = x.sin x.

2°)En déduire une primitive de f sur R

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = a\cos x + b\cos^3 x$ où a et b deux réels .

1°)Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

2°)Comparer f(x) et $f''(x)$ En déduire les primitives de f dans R .

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$

1°)Prouver qu'il existe deux réels a et b telles que : pour tout x de $\mathbb{R}-\{-2,2\}$: on ait :

$f(x) = \dfrac{a}{(x-2)^2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$

2°)Déduire les primitives sur $]-2,2[$ de f .

EXERCICE N°7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I =]-∞ ; 2[par : $f(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

1°) Déterminer les réels a et b, tels que pour tout réel x de l'intervalle I =]-∞ ; 2[: $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-2)^2}$

2°) En déduire la primitive de f sur l'intervalle I =]-∞ ; 2[qui s'annule en x = 1.

EXERCICE N°8

1°)Déterminer une primitive sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2°)On considère le fonction G, définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $G(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, et que : $G'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$

3°)En déduire une primitive, sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, de la fonction $f : x \to \dfrac{1}{\cos^4 x}$

EXERCICE N°9

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$ par : $f(x) = (x^2+x+1)\sqrt{3-2x}$

1°)Montrer que : $x^2 = \dfrac{(3-2x)^2}{4} - \dfrac{3(3-2x)}{2} + \dfrac{9}{4}$

2°)Déterminer alors le primitive de f dans $\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$ qui s'annule en 1

EXERCICE N°10

1°)Montrer que la fonction $f : x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ admet des primitives sur R.

On notera alors F la primitive de f vérifiant F(0)=0.
2°)Etudier la parité de F et préciser le sens de variations de F sur R.
3°)Etudier les variations de la fonction sur $]0,+\infty[$

4°)En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout x > 0 , on ait : $F(x) = c - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5°)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = c$

6°)On pose, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x$.

a- Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto F\circ g(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, et calculer $\varphi'(x)$.

b- En déduire que, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F\circ g(x) = x$.

c- Déterminer alors $F(1), F(\sqrt{3})$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

d- Montrer que $c = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE N°11

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1°) a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Etudier les variations de f sur $[0\ ;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
2°) Soit F la primitive de f sur $[0\ ;+\infty[$ telle que $F(0) = 0$. On ne cherchera pas à exprimer $F(x)$.
a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0\ ;+\infty[$?
b) Quelles sont les variations de F sur $[0\ ;+\infty[$?

3°) On définit sur $[0\ ;+\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$ et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$.

a) Etudier, sur $[0\ ;+\infty[$, les variations de H et K.

b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

c) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4°) a) Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique α sur $[0\ ;+\infty[$.

b) Montrer que l'on peut préciser : $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.