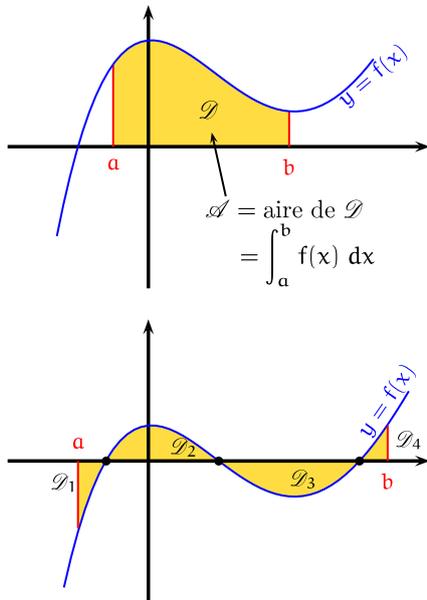


Intégrales

Définition de l'intégrale

Un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) étant fixé, l'unité d'aire est l'aire du carré OIKJ où $I(1,0)$, $K(1,1)$ et $J(0,1)$ (l'aire du carré OIKJ vaut 1 par définition).



f est une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a, b]$.

\mathcal{D} est le domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f .

L'**intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$** est l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} exprimée en unités d'aire.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$ car il est obtenu en sommant les aires des rectangles de longueur $f(x)$ et de largeur infinitésimale dx quand x varie de a à b .

Si f n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est la différence de la somme des aires des domaines situés au-dessus de (Ox) et de la somme des aires des domaines situés au-dessous de (Ox) .

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4.$$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). La **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ est $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Propriétés de l'intégrale

• Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors $\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et λ un réel. Alors $\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

• Positivité de l'intégrale, croissance de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leq b$ et si pour tout réel x de $[a, b]$ on a $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leq b$ et si pour tout réel x de $[a, b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

• Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). Si m et M sont deux réels tels que pour tous réels x de $[a, b]$, on ait $m \leq f(x) \leq M$, alors $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$.

• Relation de CHASLES

Convention : On pose $\int_a^a f(x) dx = 0$ et $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a, b et c de I , on a $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.