Intégrales

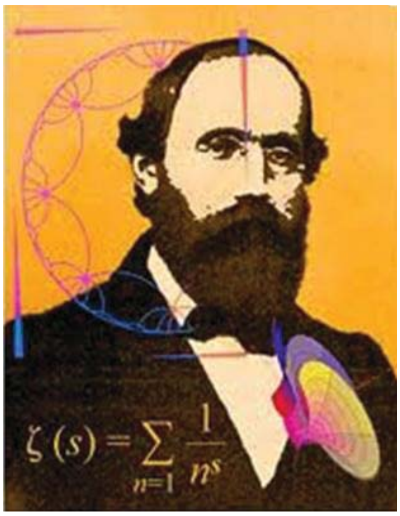
MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

INTEGRALES

Henri-Léon Lebesgue

(28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée initialement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à l'Université de Nancy en 1902. Il fut l'un des grands mathématiciens français de la première moitié du vingtième siècle.



Bernhard Riemann

(**allemand, 1826-1866**) Ce très grand mathématicien, élève de Gauss à Göttingen de Jacobi à Königsberg et de Dirichlet à Berlin, fut professeur en la célèbre université de Göttingen, succédant à ce dernier en 1859 (Dirichlet avait lui-même succédé à Gauss quatre ans plus tôt). Riemann mourut prématurément, atteint de tuberculose à Selesca (lac Majeur, Italie) où il se soignai.

RESUME DU COURS

★★★★★★★★★

I- Notion d'intégrale :

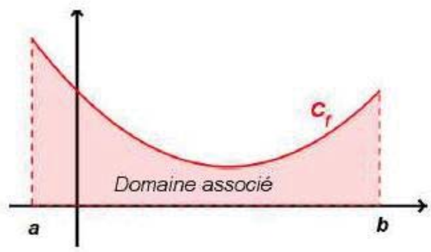
Le but de l'intégration est de calculer la surface délimitée entre la courbe et l'axe des abscisses.

Aire du domaine associé à une fonction positive

Le domaine associé :

Nous appellerons domaine associé à une fonction f positive sur $[a;b]$, le domaine ξ délimité par la courbe ζ_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations :

x=a et x=b ($a \leq b$).

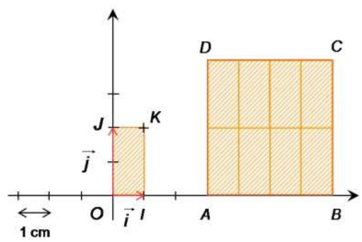


Ce domaine est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Unité d'aire :

le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J), l'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle bâti à partir des points O, I K et J.

Si l'on a : OI=1cm et OJ=2cm alors l'unité d'aire est égale à 1×2=6 cm².



Définition 1 :

Soit une fonction **continue** (ou continue par intervalle) **positive** sur l'intervalle $[a;b]$. On appelle intégrale de a à b de la fonction *f*, l'aire du domaine associé à *f* sur l'intervalle $[a;b]$ exprimé en u.a, le nombre noté : $\int_a^b f(x)dx$.

Remarque :

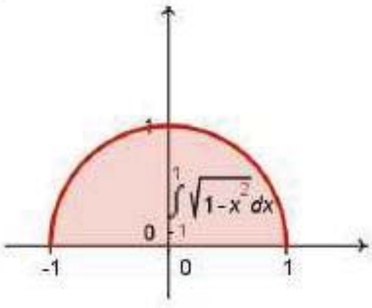
- $\int_a^b f(x)dx$ se lit : « somme ou intégrale de *a* à *b* de *f*(*x*) dx »
- *a* et *b* sont les bornes de l'intégrale.
- La variable '' x '' est une variable muette, c'est-à-dire qu'elle n'est plus présente lorsque le calcul est effectué.

• La variable x peut être remplacé par : t, u, ou toute autre lettre à l'exception de a et b.

• Le symbole dx n'a pas de signification sinon on rappelle la démarche des concepteurs du XVII[e] siècle (Leibniz). Il signifiait à l'époque une quantité infinitésimale (largeur des rectangles).

Exemple : Calculer l'intégrale suivante : $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

Le demi cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation : $x^2+y^2=1$.



On en déduit alors que le demi-cercle de centre O et de rayon 1 pour $y\geq 0$ a pour équation $y=\sqrt{1-x^2}$. On en déduit que l'intégrale est l'aire du demi-cercle de rayon 1 soit $\frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

II- Fonction continue d'un signe quelconque :

Définition 2 :

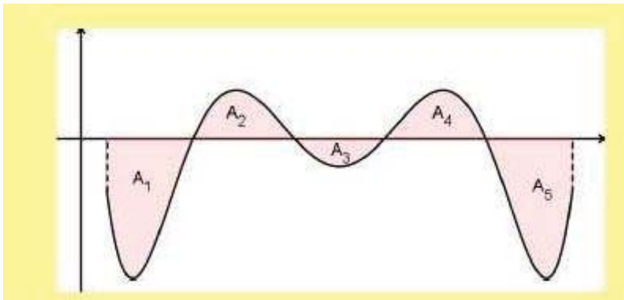
Soit une fonction continue (ou continue par intervalle) sur l'intervalle $[a;b]$.

• Si f est négative sur $[a;b]$, on a alors

$$\int_a^b f(x)dx=-A$$

• Si f a une signe quelconque sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)dx=-A_1+A_2-A_3+A_4-A_5+...$$



III- Propriété algébriques :

Propriété 1: Soit f une fonction continue sur un intervalle I alors :

1°) Pour tout $a\in I$ on a : $\int_a^a f(x)dx=0$

2°) Pour tous a, b et c de I tels que $a<b<c$, on a : $\int_b^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

Remarque : Ces deux propriétés résultent directement de la définition de l'intégrale en termes d'aire.

Définition 3 :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, alors : $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

A partir de cette définition, on en déduit le théorème (admis) suivant :

Théorème 1 : Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, contenant a,b et c, alors :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Remarque :

• Si une fonction est paire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= 2\int_0^a f(x)dx$$

• Si une fonction est impaire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= 0$$

Théorème 2 : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b, alors pour tous les réels α et β, on a :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

Exemple : soit une fonction f continue sur $[0,1]$ définie par : $f(x) = 5x^2 - 3x$.

$$\int_a^b f(x)dx = 5\int_0^1 x^2dx - 3\int_a^b xdx\,.$$

Or on a vu par avec la quadrature de la parabole que : $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$

Quand à la deuxième intégrale, il s'agit de l'aire d'un triangle rectangle de côté 1 donc :

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

On en déduit alors que :

$$\int_0^1 f(x)dx = 5\times\frac{1}{3} - 3\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6} u.a.$$

VI - Inégalité et valeur moyenne

Théorème 3 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ $(a \le b)$.

1°) Positivité :

Si $f \ge 0$ sur $[a;b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

2°) Intégration d'une inégalité :

Si $f \ge g$ sur $[a;b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

3°) Inégalité de la moyenne :

$\forall x \in [a;b]$, $m \le f(x) \le M$ alors $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Exemple : Encadrement de l'intégrale suivante : $\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$

On encadre la fonction sur $[0,9]$:

$$0 \le x \le 9$$
$$0 \le \sqrt{x} \le 3$$
$$1 \le 1+\sqrt{x} \le 4$$
$$\frac{1}{4} \le \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \le 9$$

On applique ensuite l'inégalité de la moyenne :

$$\frac{1}{4}(9-0) \le \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \le 1(9-0)$$

$$\frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \leq 9$$

Théorème 4 : Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$. Il existe alors un réel $c \in [a;b]$ tel

que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

On pose alors : µ =f(c) qui est appelée **valeur moyenne** de fonction.

V- Primitive d'une fonction continue :

Théorème 7 : soit f une fonction continue sur un intervalle I. soit un réel $a \in I$. La fonction F définie sur I par :
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$

est alors l'unique primitive de f sur l qui s'annule en a.

Règles d'intégration :

Du fait des règles de deriviation et de la linéarisation de l'intégrale, on en déduit les règle suivantes en reprenant comme constante d'intégration k=0 :

IV- Primitives élémentaires et règles d'intégration :

Primitive de la somme	$\int (u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un scalaire	$\int (ku) = k\int u$
Primitive de u'u''	$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\frac{u'}{u}$ **n≠1**	$\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive $\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$

IIV- Calculs d'intégrales

1°) Calcul à partir d'une primitive

Théorème 8 : f est une fonction continue sur un intervalle I. F est une primitive quelconque de f sur I, alors pour tous réels a et b on a : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

On note alors : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Exemple

1) Calculer l'intégrale suivante : $\int_{-1}^{2}(x^2 - 4x + 3)dx$

$$\int_{-1}^{2}(x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 2\times 4 + 3\times 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - 3\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 8 + 6 + \frac{1}{3} + 2 + 3$$
$$= 6$$

2) Calculer l'intégrale : $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx$

$$\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_0^2$$

$$= \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{5} + 1\right)$$

$$= \frac{6}{5}$$

2°) Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ et admettant des dérivées u' et v' continues.

Alors $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Calcul des surfaces et des volumes :

Théorème : Etant donné deux fonction f et g continues sur l'intervalle $[a;b]$ l'aire du domaine délimité par les représentations graphiques de f et g et les droites d'équation x=a et x=b est, en unités d'aire, égale à :

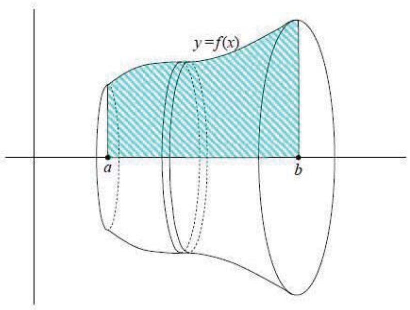
$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$$

IIIV- Calcul de volumes :

1°) Volume d'un solide de révolution

Théorème : Etant donné une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$, le volume du solide de révolution engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, du domaine délimité par l'axe des abscisses , la représentation graphique de f et les droites d'équation x = a et x=b en unités de volume, égale à : $\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$

Exemples :



2°) Calculer le volume d'une boule de rayon R.

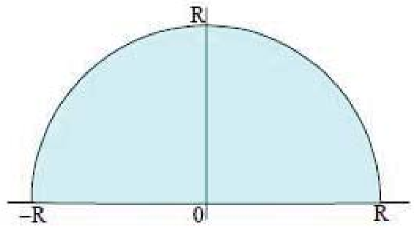
Une boule de rayon R est engendrée par la ratotion d'un demi-disque autour de son diamètre. Pour simplifier des choses, utilisons un demi-disque centré en O et dont le diamètre est sur l'axe des abscisses. Il est défini par :

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le R^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \le R^2-x^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$$

Ce qui montre est sous la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{R^2-x^2}.$

$$V=\int_{-R}^{R} \pi\left[f(x)^2\right]dx=\int_{-R}^{R} \pi(R^2-x^2)dx=2\int_0^R \pi(R^2-x^2)dx \text{ (fonction paire)}$$

$$V=2\pi\int_0^R (R^2-x^2)dx=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3$$



3°) Calculer le volume d'un cône de hauteur h et dont le cercle de base a pour rayon R.

Le cône est engendré par la rotation d'un triangle rectangle . le cours de seconde donne immédiatement une équation de la droit sous laquelle se trouve le triangle. Elle représente la fonction : $f : x \mapsto \frac{R}{h}x$.

$$V = \int_0^h \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} x^2 dx$$

$$V = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{R^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

En remarquant que πR^2 est l'aire du disque de base, que l'on désigne souvent par B, la formule devient : $V = \frac{Bh}{3}$.