c- Déterminer alors $F(1), F(\sqrt{3})$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

d- Montrer que $c = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE N°11

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1°) a) Calculer la limite de f en +∞.
b) Etudier les variations de f sur [0 ; +∞[et dresser son tableau de variations.
2°) Soit F la primitive de f sur [0 ; +∞[telle que F(0) = 0. On ne cherchera pas à exprimer F(x).
a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur [0 ; +∞[?
b) Quelles sont les variations de F sur [0 ; +∞[?

3°) On définit sur [0 ; +∞[les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$ et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$.

a) Etudier, sur [0 ; +∞[, les variations de H et K.

b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

c) En déduire la limite de F en +∞.
4°) a) Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique α sur [0 ; +∞[.
b) Montrer que l'on peut préciser : $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.

BAC MATHS

2009/2010

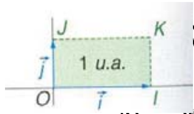
Cours et 283 exercices

Elaboré par : ALI AKIR

Fiche de cours — 4ème Maths
Intégration

Notion d'intégrale d'une fonction

Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$, on définit les points I, J et K par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et OIKJ rectangle.
L'aire du rectangle OIKJ définit alors l'unité d'aire (u.a.).

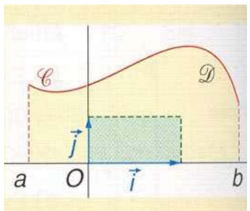


Aire et intégrale d'une fonction positive

Définition
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] et C sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$

L'intégrale de a à b de f est le réel noté $\int_a^b f(x)dx$, égal à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine D délimité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b.

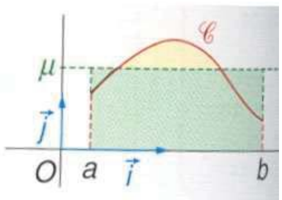
Remarque
a et b sont les bornes de l'intégrale et x est une variable muette :
elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par les lettres t ou u, ainsi : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$



Valeur moyenne

Définition
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] avec a < b. La valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

La valeur moyenne de f sur [a ; b] est donc le réel μ tel que le rectangle de dimensions μ et b - a soit de même aire que le domaine D délimité par la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équations
x = a et x = b



Intégrale et primitive

Intégrale d'une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle [a ; b]

Théorème :
Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle I = [a ; b] . On note C, sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On définit sur [a; b] la fonction $A : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et on fixe x_0 dans [a ; b]

la fonction A est dérivable sur I et sa dérivée est f

Primitive d'une fonction continue

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b]

*)La fonction Φ définie sur [a ; b] par $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est :L'unique primitive de f sur [a ; b] qui s'annule en a

Remarques

• La fonction Φ, définie dans le théorème, est donc dérivable sur [a ; b] , de dérivée f

Ce résultat montre que toute fonction continue sur [a ; b] admet une, donc des primitives sur [a ; b]

Plus généralement, toute fonction continue sur un intervalle I quelconque admet des primitives

• Soit F une primitive quelconque de f sur [a ; b], alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

*)Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(J) \subset I$. Alors la fonction F définie sur J par $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $F'(x) = u'(x)f(u(x))$, pour tout x de J.

*)Soit I un intervalle centré en 0 et soit a un réel de I.

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$
- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
- Si f périodique de période T alors $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel.

Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^b (k.f)(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$$

Intégrales et inégalités

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de , et a, b deux réels appartenant à I.

Si a ≤ b et f ≥ 0 sur l'intervalle I, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.	Si a ≤ b et f ≤ 0 sur l'intervalle I, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.
Si a ≥ b et f ≥ 0 sur l'intervalle I, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.	Si a ≥ b et f ≤ 0 sur l'intervalle I, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Conservation de l'ordre

Soit f et g deux fonctions continues sur [a ; b]. Si f ≤ g sur [a ; b], c'est-à-dire si, pour tout réel x de [a ; b], f(x) ≤ g(x) , alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.

➤ Si a ≤ b et s'il existe deux réels m et M tels que m ≤ f (x) ≤ M, pour tout réel x de [a ; b] alors $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

- S'il existe un réel M positif tel que $|f| \le M$ sur I, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M\,|b-a|$

Intégration par parties

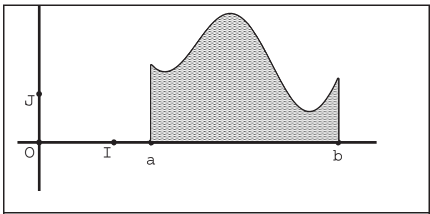
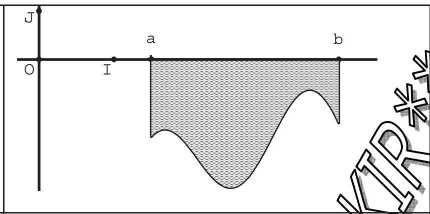
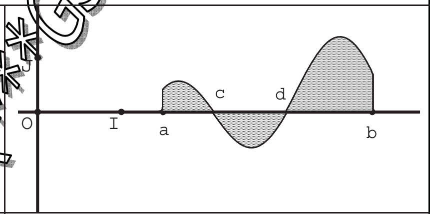
Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I. Pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b u'(x)\times v(x)dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)dx$

Aire d'un domaine compris entre deux courbes

Théorème :

Soit f et g deux fonctions continues, a et b deux réels de I tels que $a \le b$.

l'aire en u.a. du domaine limité par les courbes C_f et C_g sur [a, b] est le réel $\int_a^b |g(t)-f(t)|dt$

		
$A = \int_a^b f(x)dx$	$A = -\int_a^b f(x)dx$	$A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$

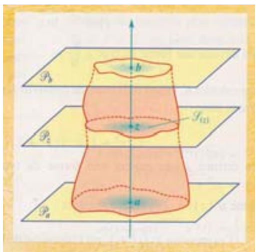
Volume d'un solide

L'espace est muni d'un repère orthonormal (0, J, J, K) et l'unité de volume (u.v.) est le volume du cube construit sur (0, J, J, K).

Théorème

On considère un solide (Σ) limité par les plans parallèles d'équations :

z = a et z = b ($a \le b$)



z = a et z = b ($a \le b$).

Pour tout z ($a \le z \le b$), on note :

- P_z le plan perpendiculaire à (Oz) et de cote z ;
- S_z l'aire de la section du solide par le plan P_z.

Lorsque S est une fonction continue sur [a, b] , le volume V du solide est calculé (en u.v.) par :

$$V = \int_a^b \mathscr{S}(z)\,dz$$

❖ Soit f une fonction continue et positive sur [a,b]. le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB} = \{M(x,y)\,/\,y = f(x) \text{ et } a \le x \le b\}$ autour de l'axe $(O,\vec{i})$ est le réel :

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

EXERCICE N°1

Calculer les intégrales suivants :

$\int_0^4 |t-2|dt$, $\int_{-1}^2 (x-|x-1|)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt$, $\int_{-1}^1 \frac{x^{2009}}{x^{14}+1}dx$,

$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin(t)dt$, $\int_0^1 t\sqrt{1-t}dt$, $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x - \sin x}{x}$,

$\int_0^1 (2t+1)\sin\pi(t^2+t+1)dt$

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sin^4 x$

1°)Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.

2°)Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$

3°)Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$

EXERCICE N°3

1°)Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivé f' est continue sur $[a,b]$.

Montrer que $\int_a^b xf'(x)dx + \int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a)$

2°)Calculer $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$ et en déduire $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4\sqrt{x} - x$ pour tout x de $[0,4]$.

1°)Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que vous calculez.

2°)Soit $a \in [0,4]$, calculer les intégrales : $I(a) = \int_0^a f(x)dx$ et $J(a) = \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy$

3°)Vérifier que $I(a) + J(a) = af(a)$. Interprétez géométriquement cette dernière relation.

EXERCICE N°5

On considère l'intégrale : $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$, $n \in \mathbb{N}$.

1°)Justifier l'existence de I_n et déterminez une relation de récurrence de I_n et I_{n-1} pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2°)Calculer $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$ et I_1

3°)Calculer I_n en fonction de n.

4°)En faisant un changement de variable et en utilisant la formule du binôme, donnez un autre expression de I_n.

EXERCICE N°6

Dans le plan P orienté par un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°)Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$.

Etudier f et construire sa courbe ζ_1 dans P.

2°)oit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $g(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}dt$.

a)Montrer que g est dérivable sur $[0,\pi]$ et que $g'(x) = -4\sin^2 x$.

b)Calculer $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire l'expression de g(x) en fonction de x .

3°) On note par ζ_2 l'image de ζ_1 par le symétrie centrale de centre O et on pose $\zeta = \zeta_1 \cup \zeta_2$. Construire ζ_2 et donner une équation cartésienne de ζ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

EXERCICE N°7

La suite de Wallis définie par : $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$ où n est un entier naturel

1°) Calculer w_0 et w_1

2°) Montrer que la suite (w_n) est décroissante

3°) Montrer, pour tout entier naturel n : $w_n \geq 0$. En déduire que la suite (w_n) est convergente.

4°) Montrer que pour tout n de N : $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$

5°) Montre que pour tout n de N : $w_{2n} = \frac{\pi . C_{2n}^n}{2 \times 4^n}$ et $w_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

6°) Montrer pour tout entier naturel n, $0 < \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} \leq 1$

En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} = 1$

7°) Etablire la formule de Wallis : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times .... \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times ...... \times (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

8°) Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = (n+1) w_n w_{n+1}$ est constante.

EXERCICE N°8

Soit $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \, dx$.

1°) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $(2n + 1) I_n = -2n I_{n-1}$.

2°) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

EXERCICE N°9

p et q étant deux nombres entiers positifs ou nuls, on pose : $B(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1°) Comparer B(p, q) et B(q, p).

2°) Etablir la relation : $B(p, q) = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$ $(p \geq 1)$.

3°) Calculer B(0, n) pour tout n appartenant à N ; en déduire B(p, q).

EXERCICE N°10

Pour n entier naturel non nul on définit la suite (S_n) par : $S_n = 1 + \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{1/3}}$

1°) Justifier pour k entier naturel non nul l'encadrement : $\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq \frac{1}{k^{1/3}}$

2°) En déduire l'encadrement : $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{dx}{x^{1/3}} + 1$.

3°) que peut-on dire de la suite (S_n) ?

4°) A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par :

$T_n = 1 + \frac{1}{2^{4/3}} + \frac{1}{3^{4/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{4/3}}$ est convergente.

EXERCICE N°11

On définit la suite u par : $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2}(t) \, dt$.

1°) a) Rappeler la valeur de la dérivée de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) Calculer alors u_0.

2°) Montrer que la suite u est décroissante.

3°) Montrer que quel que soit n dans N : $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{2n+3}$.

4°) En déduire que pour tout n dans N : $\dfrac{1}{2(2n+3)} \le u_n \le \dfrac{1}{2(2n+1)}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} 2nu_n$

5°) On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$

a) Montrer que pour tout n dans N : $S_n = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$

b) En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N°12

On considère le fonction f définie par : $f(y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \dfrac{\sin(xy)}{x} dx$.

1°)Justifier l'existence de f pour tout y de R.

2°)Montrez, en utilisant la formule de la moyenne que , si a et b deux réels tels que a < b, il existe $c \in [a,b]$, tel que $\dfrac{\sin b - \sin a}{b-a} = \cos c$.

3°)Montrez les inégalités $|\sin b - \sin a| \le |b-a|$ et $|\cos b - \cos a| \le |b-a|$, pour tout a et b de R.

4°)Soit $y_0 \in R$. On pose $A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(xy_0) dx$.

Montrer que $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} - A\right) = 0$. En déduire que f est dérivable au point y_0 et exprimer $f'(y_0)$

EXERCICE N°13

Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b]$.

1°)a-Quel est le signe de $\int_a^b [f(t)+xg(t)]^2 dt$, où x désigne un nombre réel ?.

b-En déduire l'inégalité suivante, appelée de **Schwarz** : $\left[\int_a^b f(t)g(t)dt\right]^2 \le \int_a^b [f(t)]^2 dt \times \int_a^b [g(t)]^2 dt$

2°)Démontrer que si f et g sont positives sur $[a,b]$ $(a<b)$ et pour tout x de $[a,b]$: $f(x)\times g(x) \ge 1$, alors : $\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \ge (b-a)^2$

EXERCICE N°14

Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b]$. $(a<b)$

1°)Justifier , l'existence de deux réel m et M tel que , pour tout x de $[a,b]$: $m \le f(x) \le M$

2°)Démontrer que si g(x) garde une signe constante sur $[a,b]$ alors $m \le \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \le M$

EXERCICE N°15

Soient f une fonction continues sur $[a,b]$.

1°)Justifier , l'existence d'un réel M tel que , pour tout x de $[a,b]$: $|f(x)| \le M$

Par la suite on suppose que a < b et M >0.

2°)Prouver que $\int_a^b |f(t)|^n dt \le (b-a)M^n$.

3°)Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\int_a^b |f(t)|^n dt} \le M$

4°)Démontrer que, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ tel que, pour tout x de $[\alpha,\beta]$: $|f(x)| \ge M - \varepsilon$.

5°)En déduire que $\int_a^b |f(t)|^n dt \ge (M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha)$

EXERCICE N°16

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(a)=\int_0^1 \sqrt{1-x^a}\,dx$.

1°)Prouver que , pur tout $x\in[0,1]$: $1-x^a \le \sqrt{1-x^a} \le 1-\frac{1}{2}x^a$

2°)En déduire que : $\frac{a}{1+a} < f(a) < \frac{2a+1}{2a+2}$.Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a)$

EXERCICE N°17

1°)Soit $C=\{M(x,y) \ / \ y=\sqrt{1-x^2} \ ,-1\le x\le 1\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox).Calculer le volume de S.

2°) Soit $C=\{M(x,y) \ / \ xy=1 \ ,1\le 2x\le 2\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox).

Calculer le volume de S.

3°)Déterminer le volume du cylindre engendré par les rotations d'axe (Ox) du segment de droite : y =R et $0\le x\le h$ avec $h,R\in\mathbb{R}_+^*$

EXERCICE N°18

1°)Calculons le volume de S, définie par : $\begin{cases} |x|+|y|\le 2-\frac{2}{3}z \\ 0\le z\le 3 \end{cases}$

2°) Calculons le volume de S, définie par : $\begin{cases} \sup(|x|,|y|)\le 1 \\ 0\le z\le 1 \end{cases}$

3°) Calculons le volume de S, définie par : $\{x^2+y^2+z^2\le 1$

4°) Calculons le volume de S où S est une sphère de rayon R.

EXERCICE N°19

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x^3}$ et on pose pour tout n de N* : $s_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$

1°)Vérifier que f est décroissante et positive.

2°)Montrer que (s_n) est décroissante.

3°)Calculer $\int_1^n f(t)dt$, $n\ge 1$ et en déduire que $0\le \int_1^n f(t)dt \le \frac{1}{2}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_1^n f(t)dt\right)$.

4°)Montrer que pour tout entier $k\ge 2$: $\int_k^{k+1} f(t)dt \le f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(t)dt$

5°)En déduire que pour $n\ge 1$: $\int_2^{n+1} f(t)dt \le s_n - f(1) \le \int_1^n f(t)dt$

6°)En déduire que (s_n) est convergente et donner un encadrement de sa valeur.

EXERCICE N°20

Soit f une fonction définie, continue et croissante sur $[0,+\infty[$.

Soient pour tout n de N* : $I_n=\int_0^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx$ et $s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1°)Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\int_0^1 f(x)dx$

2°)Montrer que pour tout entier k vérifiant $0\le k\le n$ on a : $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

3°)En déduire l'encadrement: $I_n+\frac{1}{n}\left[f(0)-f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\le s_n\le I_n$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=\int_0^1 f(x)dx$

4°)Application : On prend $f(x)=x^p$ où p un entier tel que $p\ge 2$.

Etablir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$

EXERCICE N°21

Pour tout entier naturel n, on définit les nombres x_n et y_n par : $x_n = \int_0^1 t^n \cos t\, dt$, $y_n = \int_0^1 t^n \sin t\, dt$

1°) Calculer x_0 et x_1.
2°) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in I,N}$ et $(y_n)_{n\in I,N}$ sont décroissantes et qu'elles sont positives. On admettra que ces suites convergent.
3°) Montrer, à l'aide de deux intégrations par partie, que pour tout entier naturel n, on a :
$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$, et $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$,
En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = \cos(1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n = \sin(1)$

EXERCICE N°22

1°)Soit $n \in N^*$, On pose $s_n = 1 + e^{it} + \dots + e^{i(n-1)t}$, $t \in]0,\pi[$.

a) Donner en fonction de n et t , une autre expression de s_n

b) En déduire que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt = \dfrac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \cos\left(\dfrac{n+1}{2}\right)t$

c) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$

2°)Pour tout $n \in N^*$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi} \left(\dfrac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt$.

a) Calculer $\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt$

b) Calculer $\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)dt$

c) En déduire que $I_n = \dfrac{1}{n^2}$

3°)Montrer que : $\int_0^{\pi}\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt\right)\left(\dfrac{t^2}{2\pi} - t\right)\right]dt = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}$

4°)Soit $x \in R_+^*$, φ une fonction dérivable sur $[0,\pi]$ et φ' sa dérivé, est continue sur $[0,\pi]$.

a) Intégrer, une fois, par parties $\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)dt$.

b) Montrer que : $\left|\int_0^{\pi}\varphi'(t)\cos(xt)dt\right| \le \int_0^{\pi}|\varphi'(t)|dt$

c) En déduire que $\left|\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)dt\right| \le \dfrac{1}{x}\left[|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^{\pi}|\varphi'(t)dt|\right]$

d) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)dt = 0$

5°)Vérifier que pour $t \in [0,\pi]$: $1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$

6°) On pose $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{t^2}{2\pi} - t}{\sin\dfrac{t}{2}} & \text{si} \quad t \in]0,\pi] \\ -2 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$

a) Montrer que φ est continue sur $[0,\pi]$

b) On suppose que φ est dérivable sur $[0,\pi]$ et que sa dérivé φ' est continue sur $[0,\pi]$.

c) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{\pi^2}{6}$