

Les fonctions logarithmiques

La fonction logarithme népérien:

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée \ln (ou \log_e), est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1

Déductions et propriétés:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\forall x \in]0; +\infty[$ et $\forall y \in]0; +\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x ; (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0; +\infty[$ et $\forall y \in]0; +\infty[$ <ul style="list-style-type: none"> $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$ 		
$\forall x \in]0; +\infty[$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ <ul style="list-style-type: none"> $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$ 		

Si n est pair, alors $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \ln x^n = n \ln |x|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0; +\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) > 0\}$

Les limites:

Limites principales

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

Déductions

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Si u est strictement positive et continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

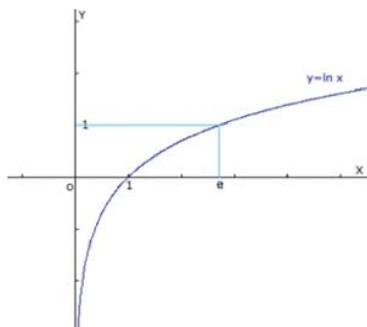
La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[; (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si u est strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I ; (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

La représentation graphique:



signe de \ln :

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

La fonction logarithme de base a avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

Définition:

La fonction logarithme de base a est la fonction notée : \log_a

$$\text{tel que : } \forall x \in]0; +\infty[; \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Cas particulier: la fonction \log_{10} est la fonction logarithme décimal et on la note \log

Déductions et propriétés:

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$	$\forall x \in]0; +\infty[$ et $\forall y \in]0; +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\log_a x^r = r \log_a x$ $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\forall x \in]0; +\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$	

Limites et inéquations:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$	$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$

La dérivée:

$$\forall x \in]0; +\infty[; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

