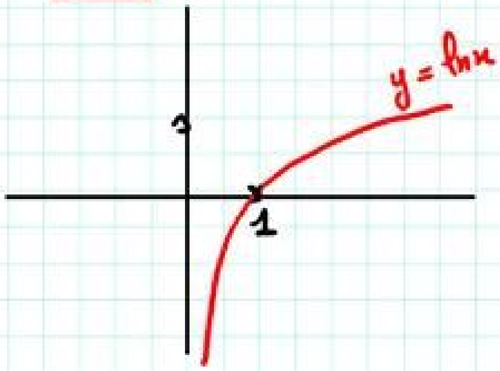
Fonction ln

Déf



$f(x) = \ln x \quad ; \quad D_f =]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

Rq $(\ln 0,3)\, x \geq 5.$

$x \leq \dfrac{5}{\ln 0,3}$

car $\ln 0,3 < 0$

Propriétés

$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$

$e \simeq 2,71$

$a, b \in \mathbb{R}_+^*$

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b \longrightarrow \ln(2e) = \ln 2 + \ln e = 1 + \ln 2$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \longrightarrow \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \longrightarrow \ln\left(\frac{2}{e}\right) = \ln 2 - 1$
- $\ln a^n = n \ln a \longrightarrow \ln(\sqrt{2}) = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$

Equation - Inéquation

$a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$\ln a = \ln b \iff a = b$

$\ln a \geq \ln b \iff a \geq b.$

$\ln e^a = a$

$\ln x = a = \ln e^a$

$\iff x = e^a.$

limtes

F.I $\frac{\infty}{\infty}$; $0\times\infty$; $+\infty-\infty$; $\frac{0}{0}$.

$\boxed{\frac{\text{Reel}}{\infty}=0}$ $\boxed{\frac{\text{Reel}}{0}=\infty}$ (Regle de signe)

$\boxed{\frac{\infty}{0}=\infty}$ $\boxed{\frac{0}{\infty}=0}$

Depart
- $\ln U \xrightarrow{+\infty} = +\infty$
- $\ln U \xrightarrow{0^+} = -\infty$

F.I
- $\frac{\ln^m U}{U^n} \xrightarrow{+\infty} = 0$ $m,n\in\mathbb{N}^*$
- $U^n \ln^m U \xrightarrow{0^+} = 0$
- $\frac{\ln U}{U-1} \xrightarrow{1} = 1$

Technique pour lever l'indétermination
- Factorisation (le plus fort en facteur)
- Developpement.
- Dérivée $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\right)$

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right)=+\infty$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\underbrace{1+\frac{1}{x}}_{\to 1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}+1\right)-1}=1$

$\boxed{\frac{\ln U}{U-1}\xrightarrow{1}=1}$

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\to 0^+}=\boxed{0}$

$\boxed{U\ln U \xrightarrow{0^+}=0}$

$\boxed{\text{signe}\,(a\ln x + b)}$

Exeple : signe $(-2\ln x + 3)$

$$-2\ln x + 3 \geqslant 0 \iff -2\ln x \geqslant -3$$
$$\iff \ln x \leq \frac{3}{2}$$
$$\iff x \leq e^{\frac{3}{2}}.$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$-2\ln x+3$	||	$+$	0	$-$	

$\boxed{\text{Dérivée \_ primitive}}$. $\boxed{P \longleftrightarrow D}$

$\boxed{f \leftrightarrow f' \leftrightarrow f''}$

$$\boxed{x\ln x - x \longleftrightarrow \ln x \longleftrightarrow \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\ln U \longleftrightarrow \frac{U'}{U}}$$

$$\ln 2x \longleftrightarrow \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\ln ax \longleftrightarrow \frac{1}{x}.}$$

$$\ln(-x) \longleftrightarrow \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\ln(x^2 - 3x + 1) \longleftrightarrow \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}.}$$

$(UV)' = U'V + V'U.$

$(x\ln x)' = 1.\ln x + \frac{1}{x} \times x$

$= \boxed{\ln x + 1}$

$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$

$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1.\ln x}{x^2}$

$= \boxed{\frac{1 - \ln x}{x^2}}$

$(U^2)' = 2U'U$

$\left((\ln x)^2\right)' = 2 \times \frac{1}{x} \cdot \ln x$

$= \boxed{\frac{2\ln x}{x}}.$