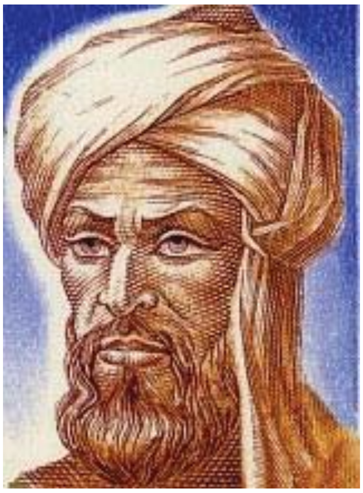
Fonction logarithme

Academy

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Fonction logarithme népérien



né vers 783, originaire de Khiva dans la région du Khwarezm[2] qui lui a donné son nom, mort vers 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome musulman perse dont les écrits, rédigés en langue arabe, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe[3]. Sa vie s'est déroulée en totalité à l'époque de la dynastie Abbasside. Il est à l'origine des mots « algorithme » (qui n'est autre que son nom latinisé: "algoritmi" [3]) et « algèbre » (issu d'une méthode et du titre d'un de ses ouvrages) ou encore de l'utilisation des chiffres arabes dont la diffusion dans le Moyen-Orient et en Europe provient d'un autre de ses livres (qui lui-même traite des mathématiques indiennes).
Son apport en mathématiques fut tel qu'il est également surnommé « le père de l'algèbre », avec Diophante d'Alexandrie, dont il reprendra les travaux. En effet, il fut le premier à répertorier de façon systématique des méthodes de résolution d'équations en classant celles-ci.

né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg[1], est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion d'une fonction mathématique[2]. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie. Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIIIe siècle et l'un des plus grands de tous les temps. Il est aussi l'un des plus prolifiques, et une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous »[3].

RESUME DU COURS

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln, la fonction

$x \mapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $x > 0$.

☑ **ln définie continue dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.**

☑ $\ln(\boxed{A.})$ existe *ssi* $\boxed{A.} > 0$

EXEMPLE $f(x) = \ln(5x - 1)$ $D_f = ?$

Il faut que $5x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{5} \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{5}, +\infty[$

Donc $D_f =]\frac{1}{5}, +\infty[$

☑ **ln** $|\boxed{A.}|$ **existe** ***ssi*** $\boxed{A.} \neq 0$

EXEMPLE $f(x) = \ln|x - 1|$ $D_f = ?$

Il faut que $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow D_f = IR \setminus \{1\}$

☑ $a > 0, b > 0$, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

$$\ln(\boxed{A}) = \ln(\boxed{B}) \Leftrightarrow \boxed{A} = \boxed{B}$$

☑ $a > 0, b > 0$, $\ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$

$$\ln(\boxed{A}) \geq \ln(\boxed{B}) \Leftrightarrow \boxed{A} \geq \boxed{B}$$

☑ $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad (x > 0)$

$\ln(\boxed{A.}) \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{A.} \geq 1.$

☑ $\ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1 \quad (x > 0)$

$\ln(\boxed{A.}) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \boxed{A.} \leq 1.$

☑ ***Propriétés :***

Pour tous réel $a > 0$, $b > 0$

$$\ln(a\,.\,b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln a$$

$$\ln(a^n) = n \ln a \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Soit a un réel strictement positif.

- Pour tout entier p, $\ln(a^p) = p \ln a$
- Pour tout entier $p \geq 2$, $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \frac{1}{p}\ln a$.

☑ ***Remarque :***

$\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $e \cong 2.718...$;

$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$, $a > 0$ $\quad \ln\sqrt[p]{a} = \frac{1}{p}\ln a \ (p \geq 2) \ a > 0$

LIMITES

Départ

☑ $\lim\limits_{+\infty} \ln(A) = +\infty$ ☑ $\lim\limits_{0^+} \ln(A) = -\infty$

Forme indéterminée

☑ $\overset{+\infty}{\frac{\ln(A)}{A^r}}=0 \quad , r\in Q_+^*$ ☑ $\overset{0^+}{A^r\ln(A)}=0 \quad , r\in Q_+^*$ ☑ $\overset{1}{\frac{\ln(A)}{A-1}}=1$

Pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x^m}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^m\ln^n x=0$.

DERIVEE

$x>0, ax>0$ et $u(x)>0$

☑ $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ ☑ $(\ln(ax))'=\frac{1}{x}$ ☑ $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$

Primitive

☑ $\int\frac{1}{x}=\ln x$ ☑ $\int\ln x=x\ln x-x$ ☑ $\int\frac{u'}{u}=\ln|u|$

☑ $\int\frac{(\ln x)^n}{x}=\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$ ☑ $\int\frac{1}{x\ln x}=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\ln|\ln x|$