Fiche de cours — *4ème Maths*

Logarithme

Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est définie sur $]0,+\infty[$, prend la valeur 0 en x = 1, est continue sur $]0,+\infty[$ et admet pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$

Soit a et b deux réels strictement positifs et $a_1, a_2, \dots a_n > 0$

$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln a$
$\ln(a_1.a_2 \dots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$	$\ln(a^n) = n \ln a$	$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

- $\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$
- $\ln x > 0$ si et seulement si $x \in]1\,;+\infty[$
- La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

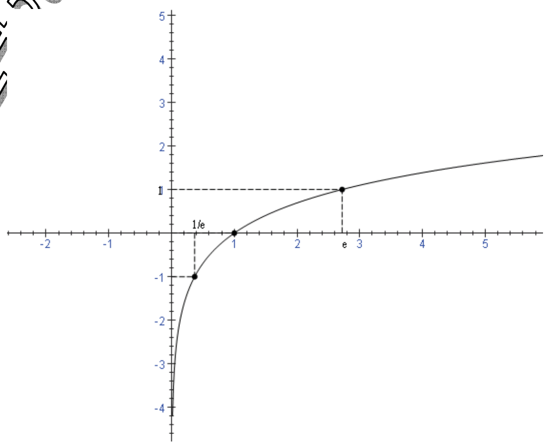
Soit n et m deux entiers naturels non nuls

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0^+} x^m \ln^n x = 0$

Tableau de variations et courbe de ln

la fonction ln réalise une bijection de R_+^* *vers* R donc il existe un unique réel, noté e, vérifiant $\ln e = 1$.

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+
ln(x)	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$



Dérivées et primitives

1°) Dérivée de ln u

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$, notée ln u, est dérivable sur I et on a :(ln u)' = $\frac{u'}{u}$

2°) Primitive de ln u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I qui ne s'annule pas sur I

La primitive sur l'intervalle I de la fonction $\frac{u'}{u}$ est la fonction ln |u| + c

3°)Primitive de x→lnx

La fonction $x \mapsto$ xlnx-x est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Fonction logarithme décimale :

C'est la fonction log, définie $]0,+\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$,

$(\log 10 = 1, \log 10^x = x)$

Maths aux lycées

Séries d'exercices — *4ème Maths*

Logarithme

EXERCICE N°1

1°)Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x\ln(x) - x + 1$.

a) Etudier le sens de variations de g
b) En déduire le signe de g .

2°)On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1 .
b) Dresser le tableau de variation de f .
c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm)

EXERCICE N°2

1°)Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$

a) Etudier les variations de f
b) En déduire que pour tout $x \geq 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$

2°) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

a) Etudier les variations de f
b) En déduire que pour tout $x \geq 0$: $\ln(x+1) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

3°)Etudier la limite éventuelle en 0^+ de $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

EXERCICE N°3

Soit f définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = (1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Montrer que f est continue. Etudier la parité de f et montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[-1, 1]$.

EXERCICE N°4

Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ par $g(x) = \dfrac{x.\ln(x)}{x-1}$ et prolongée par continuité en 0 et en 1.

1°)Que valent g(0), g(1) ?
2°)Etudier la branche infinie de C_g.

EXERCICE N°5

Soit n appartenant à N. g_n : $]0, 1[\to \mathbb{R}$, $x \to x\ln^n\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1°)Montrer g_n que est continue sur]0, 1[
2°)Montrer que g_n admet un prolongement par continuité f_n sur [0, 1].

EXERCICE N°6

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1 + x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

1) Etudier le sens de variation des fonctions h_n.
2) Calculer $h_n(0)$ puis en déduire le signe de h_n.
3) Etude du cas particulier n = 1.
a. Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1, +\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
b. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1, +\infty[$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
a. Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
b. En déduire les variations de f_n sur $]-1, +\infty[$. On précisera les limites aux bornes.

EXERCICE N°7

I. On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1°)Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$.

2°)En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \ln(n) + 1$.

II. On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_o = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

a)Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
b)En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2°)a)Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.

b)En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

c)Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n).
3°)a)A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$
b)En utilisant la partie 1, établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$.
c)En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE N°8

Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in]1, +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{x.\ln(x)}$.

1°) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

2°) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq 3$: $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: $S_n - \frac{1}{2.\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n.\ln(n)}$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $n \geq 2$:
$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2}\ln(2)$

c)Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))}$.

4°)Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ on note : $u_n = S_n - \ln(\ln(n+1))$ et $u_n = S_n - \ln(\ln(n))$
Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq2}$ et $(v_n)_{n\geq2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: $0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n.\ln(n)}$

b) En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} prés

EXERCICE N°9

On pose, pour tout élément n de N* : $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

1)a. Montrer que : $\forall\, p \in N^*$, $\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{p+1}$.

b. En déduire que : $\forall\, n \in N^*$, $u_n \leq 1 + \ln(n)$.

2°)On considère la fonction φ_1 définie sur R_+ par : $\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = x(1+\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Montrer que φ_1 est continue sur R_+.

3°)Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t)dt$.

a. Montrer que pour tout élément n de N* la fonction φ_n est parfaitement définie et continue sur R_+. Que vaut $\varphi_n(0)$?

b. Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in N^*}$ et $(b_n)_{n\in N^*}$ telles que: $\forall n \in N^*, \forall x \in R^*_+$: $\varphi_n(x) = x^n\,(a_n + b_n \ln x)$.

On montrera que : $\forall\, n \in N^*$ $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}$ et $b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$.

5°)Calculer b_n.

6°)Pour tout élément n de N*, on pose : $c_n = n!\, a_n$.

a. Montrer que $c_n = 2 - u_n$.

b. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $|c_n| \leq 1 + \ln(n)$.

c. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

EXERCICE N°10

1°) Soit x > -1. Démontrer : $\ln(1+x) \leq x$.

2°) Soit k dans]0, 1[et soit (u_n) définie par $u_n = \prod_{p=0}^{n} (1+k^p)$

a) Montrer que (u_n) est croissante.

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$ est majorée.

c) Montrer que (u_n) est convergente.

EXERCICE N°11

Soit u et v les deux suites définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n) \quad \text{et } v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

Montrer que u et v sont deux suites adjacentes. On sera amené à étudier les VARIATIONS, puis le SIGNE des fonctions f et g définies par : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$; $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{1}{x+1}$.