

Les fonctions exponentielles

La fonction exponentielle népérienne:

Définition :

La fonction exponentielle népérienne, notée e^x (ou $\exp(x)$), est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$, et qui est définie sur \mathbb{R}

Déductions et propriétés:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$	$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $(e^x)^r = e^{rx} ; (r \in \mathbb{Q})$ $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\ln e^x = x$	
$\forall x \in]0; +\infty[\quad e^{\ln(x)} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}$ <ul style="list-style-type: none"> $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$ 	
$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in]0; +\infty[$ <ul style="list-style-type: none"> $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$ 	

Si n est pair, alors $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \ln x^n = n \ln |x|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$

Les limites:

Limites principales

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

Déductions

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)}}{[u(x)]^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur l'intervalle \mathbb{R}

Si u est continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

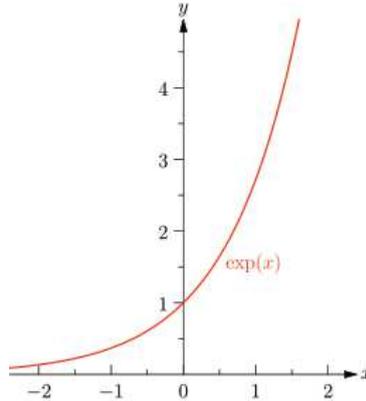
La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur l'intervalle \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; (e^x)' = e^x$$

Si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I ; (e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

La représentation graphique:



La fonction exponentielle de base a avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

Définition:

La fonction exponentielle de base a , notée : a^x , est la réciproque de \log_a

Déductions et propriétés:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a}$	$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R} \text{ et } r \in \mathbb{Q}$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $(a^x)^r = a^{rx}$ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$\log_a(a^x) = x$	
$\forall x \in]0; +\infty[\quad a^{\log_a x} = x$	
$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[$	
$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$	

Limites et inéquations:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

La dérivée:

$$\forall x \in]0; +\infty[; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

