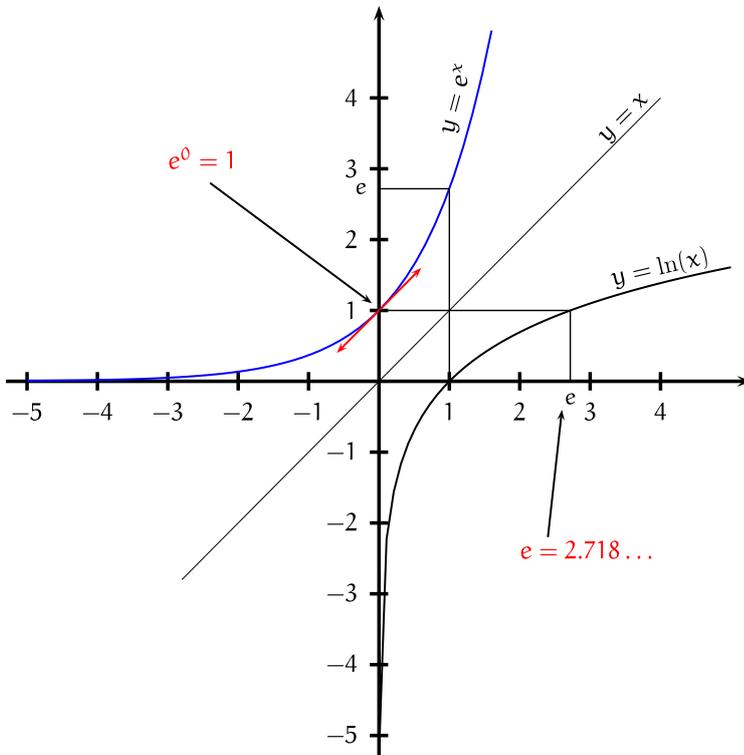


# La fonction exponentielle

## Définition de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est l'unique fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x, f'(x) = f(x).$$



## Propriétés analytiques

- La fonction exponentielle est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\text{Pour tout réel } x, (\exp)'(x) = \exp(x).$$

- La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ .

- Limites aux bornes du domaine :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

- Théorèmes de croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

- Nombre dérivé en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

## Propriétés algébriques

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $e^{x+y} = e^x \times e^y$ .

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $e^x \times e^y = e^{x+y}$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $e^x \neq 0$  et  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $e^x \neq 0$  et  $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ .

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ .

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ .

Pour tout réel  $x$  et tout entier relatif  $n$ ,  $(e^x)^n = e^{nx}$ .

Pour tout réel  $x$  et tout entier relatif  $n$ ,  $e^{nx} = (e^x)^n$ .

## Liens avec le logarithme népérien

Pour tout réel  $x$ ,  $\ln(e^x) = x$ . Pour tout réel  $x$  strictement positif,  $e^{\ln(x)} = x$ .

## Résolution d'équations et d'inéquations

Si  $a > 0$ , l'équation  $e^x = a$  a une solution et une seule. Si  $a \leq 0$ , l'équation  $e^x = a$  n'a pas de solution.

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $(e^x = e^y \Leftrightarrow x = y)$ . Pour tout réel  $x$  et tout réel strictement positif  $a$ ,  $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$ .

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Donc

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $(e^x < e^y \Leftrightarrow x < y)$ . Pour tout réel  $x$  et tout réel strictement positif  $a$ ,  $e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a)$ .