Fiche de cours — 4ème Maths

Exponentielle

Définition et propriétés

On appelle fonction exponentielle (noté e^x) la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

*)Pour tout réel x et pour tout réel y > 0, : $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

*) Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$

*) Pour tout réel x>0, $e^{\ln(x)} = x$

*) Pour tout réel x : $e^x > 0$

*)Pour tout réel x : $(e^x)' = e^x$

Soit deux réels a et b

$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	Pour tout entier n : $e^{na} = (e^a)^n$
Pour tout entier $q \geq 2$: $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$		Pour tout entier $q \geq 2$ et tout entier p : $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$	

Les limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$	$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : \lim\limits_{x \to -\infty} x^m e^{nx} = 0$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

*)La fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, $x \in I$

*)Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Puissances

Soit un réel a>0. Pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b\ln(a)}$

Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tous réels c et d :

$a^{c+d} = a^c \times a^d$	$(a^c)^d = a^{cd}$	$a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d}$	$a^c \times b^c = (ab)^c$	$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$

Définition et propriétés

Soit un réel a>0.

*)On appelle fonction exponentielle de base a la fonction $x \mapsto a^x$.

*)La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur R et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto (\ln a)a^x$

*)Si a > 1alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

*)Si 0 < a < 1 alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

Définition et propriétés

Soit r un rationnel.

*) On appelle fonction puissance r la fonction $x \mapsto x^r = e^{r\ln(x)}$, x>0

*)Si r > 0 alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$

*)Si r < 0 alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

*)La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivé est la fonction $x \mapsto rx^{r-1}$

*)Soit r un rationnel différent de -1. les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto x^r$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Théorème

Soit r un rationnel strictement positif.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$

EXERCICE N°1

Soit la fonction g définie sur [0, +∞[par $g(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$ si $t>0$ et $g(0)=1$

1°)a)Établir que g est continue en 0.
b)Déterminer la limite de g en +∞.
2°)a)Pour tout t > 0 , calculer g'(t) .
b)Prouver que pour tout $t\geq 0\,,1+t\leq e^{t}$.
c)En déduire le signe de g' et le sens de variation de g (on ne demande pas de construire la courbe représentative de g).
3°)On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0. À cet effet on introduit la fonction h définie sur

[0, +∞[par : $h(t)=1-t+\dfrac{t^{2}}{2}-e^{-t}$

a)Calculer h' et h'', ainsi que les valeurs de h(O) et h'(0).

b)Prouver que pour tout : $t\geq 0$: $0\leq h(t)\leq\dfrac{t^{3}}{6}$ (I)

pour cela, on établira d'abord que $0\leq h''(t)\leq t$ et on en déduira un encadrement de h' et de h.

c)Déduire de la relation (I) un encadrement de $\dfrac{1-e^{-t}-t}{t^{2}}$. Prouver finalement que g est dérivable en 0 et donner g'(0).
4°)Construire la courbe représentative C de g., le plan étant rapporté à un repère orthonormal. $(O,\vec{i},\vec{j})$.

EXERCICE N°2
Partie A.

On désigne par f la fonction définie sur R par $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}$ et on appelle C la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$
1°) Étudier les variations de f. Préciser les limites de f en -∞ et en +∞.
2°) Déterminer le signe de f(x) en fonction de x.
3°)Tracer la courbe C.

Partie B.

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction g définie sur R-{0} par $g(x)=\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|$.

On note G la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
1°)Préciser les limites de g en -∞, en +∞ et en 0.
2°)Calculer g'(x) et déterminer le signe de g'(x) en utilisant le signe de f'(x) et le signe de f(x) .
Dresser le tableau de variation de g.

3°)Démonter que pour tout x réel strictement positif : $g(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$

Montrer que la droite D d'équation y = x est asymptote à la courbe G. Étudier la position de la courbe G par rapport à D pour tout x réel strictement positif.

4°)Démontrer que pour tout x réel strictement négatif: $g(x)-\dfrac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$

Montrer que la droite d d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe G.

Étudier la position de G par rapport à d pour tout x réel strictement négatif.

5°)Construire G, D et d dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On utilisera un graphique différent de celui de la partie A.)

EXERCICE N°3

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

On considère la suite (u_n) définie par :$u_n=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt$

1°) Soit φ la fonction définie sur [0;2] par : $\phi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$

a) Étudier les variations de φ sur [0;2].

b) Montrer que, pour tout réel t dans [0;2],on a : $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\le\varphi(t)e^{\frac{t}{n}}\le\frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$

c) Par intégration en déduire que : $\frac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}}-1)\le u_n\le\frac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}}-1)$

d) Montrer que, si (u_n) possède une limite ℓ, alors $3\le\ell\le\frac{7}{2}$

2°)a)Calculer l'intégrale $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}dt$.

b) Montrer que, pour tout n de N* : $I\le u_n\le e^{\frac{2}{n}}I$ .En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite ℓ.

EXERCICE N°4

Soit f définie sur R par : $f(x)=\int_x^{2x}e^{-t^2}dt$

1°) a) Etudier la parité de f.

b) Déterminer le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et $-\infty$.

2°) a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x)=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}$.

b) Etudier la variation de f. Préciser les points où f admet un extremum.

c) Calculer f "(x) et déterminer son signe.

d) Construire C_f (on admettra que le maximum de f est sensiblement égal à 0,3).

EXERCICE N°5

On note, pour tout nombre réel a positif et pour tout entier naturel n : $u_n(a)=\int_0^1x^ne^{a(1-x)}dx$

1°) Calculer $u_0(a)$.

2°) Soit a > 0 donné.

a) Montrer que pour tout n dans N : $0<u_n(a)<\frac{e^a}{a+1}$

b) Montrer que la suite $(u_n(a))$ est décroissante.

c) Déterminer la limite de $u_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

3°)

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n dans N :

$au_{n+1}(a)=-1+(n+1)u_n(a)$

b) Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans N : $u_n(a)=\frac{n!}{a^{n+1}}\left[e^a-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right]$.

EXERCICE N°6

On considère la suite (U_n) définie par :pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1°)Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur [0 ; 1].
En déduire la valeur de U_1 .
2°)Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$
3°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq 0$
4°)a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n :
$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$

b) En déduire que pour tout n non nul, $U_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

5°)Déterminer la limite de la suite (U_n)

EXERCICE N°7

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique 3 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par : $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan.
1°) a) Déterminer la limite de f en + ∞ .
b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ;+ ∞ [on a :$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.
En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation y = x .
d) Etudier la position relative de (C) et (Δ).
2°) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3°) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C).

Partie B

Pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [, on pose $F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})dt$

1°) Soit n un entier naturel. Donner une interprétation géométrique de F(n).
2°)Etudier le sens de variation de F sur l'intervalle [0 ; + ∞ [.

3°) Démontrer que pour tout réel a strictement positif on a : $\dfrac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$.

4°)Soit x un réel strictement positif.

Déduire de la question 3° $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

5°)On admet que la limite de F(x) , lorsque x tend vers + ∞ existe et est un nombre réel noté I.
Etablir que : $\dfrac{1}{2}\ln 2 \leq I \leq \dfrac{1}{2}$.

6°)Pour tout entier naturel n, on pose :. $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})dt$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\ln(1+e^{-2(n+1)}) \leq U_n \leq \ln(1+e^{-2n})$
b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.
c) Déterminer la limite de la suite (U_n).
7°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$.
a) Exprimer S_n à l'aide de F et n.
b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.

EXERCICE N°8

On considère la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par $f(x) = 1 - e^{-x}$.
I.1°) a)Dresser le tableau de variation de f.
b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq x$, l'égalité ayant lieu seulement pour x = 0.
2°)a)Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^{-t}dt$$

b) En écrivant l'égalité précédente pour n = 2, puis pour n = 3, montrer que :
$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \le x - f(x) \le \frac{x^2}{2}$

II. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
1°) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in]0, 1]$.
b) Montrer que , (u_n) est décroissante sur N.
c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

2°)Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{1}{2}$.

3°) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k^2$.

III.1°) On note φ la fonction, définie sur R, par : $\varphi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2°)On considère la fonction réelle g, définie par : $g(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{*}_{+}$, $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(t)dt$.

a) Montrer que g est bien définie et continue sur R_+^* .

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - \frac{x}{4} \le g(x) \le 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$.

c) En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0, puis donner g'(0).

3°) a) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$: $\int_1^x \phi(t)dt \le \ln(x)$.

b) En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

4°) a) Pour tout réel x strictement positif, calculer g'(x) et l'écrire sous la forme : $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

b) Montrer alors que : $xh'(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

c) Etudier la fonction, notée k, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $k(x) = (x+1)e^{-x} - 1$

d) Donner le signe de k, puis les variations de h et enfin celles de g.
e) Dresser le tableau de variations de g, et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

EXERCICE N°9

I.On considère la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, dont le terme général est donné par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}dx$.

1°)Calculer u_0
2°)Justifier que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_1.
3°)Montrer que (u) est positive.
4°)Montrer que (u) est décroissante.

5°) a)Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

b)Calculer alors u_2.
6°)Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

II.1°)Soit pour tout entier naturel $n \ge 2$, on considère la fonction S_n, définie sur R par :
$S_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}e^x}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ .Montrer que S_n est la somme de (n-1) termes d'une suite géométrique.

2°)En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ tel que pour tout entier naturel $n \ge 2$: $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(1 - e^{-k})$