Maths aux lycées

Fiche de cours *4ème Maths*

Différentielle

Une équation différentielle est une équation :
*)Dont l'inconnue est une fonction (généralement notée y ou z , ..)
*)Dans la quelle apparaît certaines des dérives de y.

Soit a, b deux réels tels que $a \neq 0$

Type n°1 : $y' = ay$

Equation différentielle	**Solutions de Equation différentielle**	**Solution qui prend la valeur y_0 en x_0**
$y' = ay$	$x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$

Type n°2 : $y' = ay + b$

Equation différentielle	**Solutions de Equation différentielle**	**Solution qui prend la valeur y_0 en x_0**
$y' = ay + b$	$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

Type n°2 : $y'' + \omega^2 y = 0$

Equation différentielle	**Solutions de Equation différentielle**	**Solution tel que** $f(0) = x_0$ **et** $f'(0) = y_0$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$x \mapsto A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$, $A, B \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x) + x_0 \cos(\omega x)$

EXERCICE N°1

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' = 2y + 2x$

1°) Soit h la fonction définie sur R par : $h(x) = -2x - 1$

a) Vérifier que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) sur R.

b) Démontrer qu'une fonction f = g + h est solution de (E_1) sur R si et seulement si g est solution de :(E_2) : $y' = 2y$ sur R.

2°) a) Déterminer les solutions g de l'équation différentielle (E_2) sur R.

b) En déduire les solutions f de (E_1) sur R.

c)Déterminer la solution de (E_1) sur R vérifiant f(0) = 0.

EXERCICE N°2

Soit l'équation différentielle : $y'+2y = 4e^{1-2x}$ (E)

1°) Démontrer que la fonction u définie sur R par $u(x) = 4xe^{1-2x}$ est une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle : $y'+2y = 0$ (E_0)

3°) Démontrer qu'une fonction v définie sur R est solution de (E) si et seulement si v – u est solution de (E_0).

4°) En déduire toutes les solutions v de l'équation (E).

5°) Déterminer la fonction v_0, solution de (E), qui prend la valeur -2e en 0.

EXERCICE N°3

On considère l'équation différentielle :(E) : $y'+2y = \dfrac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$.

1°) Vérifier que la fonction f est une solution de (E) tel que pour tout x de R :

$f(x) = e^{-2x}\ln(1+2e^{x})$.

2°) Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle :(E') : $y' + 2y = 0$.

3°) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

EXERCICE N°4

On considère l'équation différentielle (1) : $y'-2y = xe^{x}$.

1°) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y'-2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur R.

2°) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur R par :$u(x) = (ax + b)e^{x}$.

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si u+ v est solution de (1)

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

EXERCICE N°5

Résoudre l'équation différentielle : $y'+y = e^{-x}$.

EXERCICE N°6

On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = e^{2x}$ (E).

1°) Démontrer que la fonction u définie sur R par $u(x) = x\,e^{2x}$ est une solution de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ (E_0).

3°)Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).

4°) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

5°)Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE N°7

On se propose de trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$

et vérifiant la propriété : pour tout $x > 0$, $x f'(x) - 3 f(x) = 3 \ln x$ (E)

1°)Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout x réel, $x P'(x) - 3 P(x) = 0$.

2°)Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$; soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 h(x)$.

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.

b) Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si, pour tout $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{3}{x^4} \ln x$.

c) On suppose que f vérifie la propriété (E).

Montrer que h est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \int_1^x \dfrac{3}{t^4} \ln t \, dt$.

Déterminer h(x) à l'aide d'une intégration par parties.

3°)Montrer qu'il existe une fonction f et une seule, solution du problème posé, et en donner l'expression.

EXERCICE N°8

On considère l'équation différentielle : $y''+2y + y = 2e^{-x}$ (E)

1°)Déterminer le réel λ tel que la fonction y_0 définie sur R par $y_0(x) = \lambda x^2 e^{-x}$ soit solution de l'équation (E).

2°)Démontrer que y, fonction numérique deux fois dérivable sur R, est solution sur R de (E) si et seulement si la fonction z définie par $z = y - y_0$ est solution de l'équation différentielle

$(E_1) : z''+2z'+z = 0$

3°) Soit la fonction $t = z'+z$. Montrer que $t'+t = 0$

4°)Résoudre alors l'équation différentielle (E_1).

5°)En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

5°)Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point de coordonnées (-1,0)et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

EXERCICE N°8

On considère l'équation différentielle : $y'' - 5y' + 4y = 0$. (E)

1°) Soit la fonction $r = y'-4y$. Montrer que $r'-r = 0$

2°)Résoudre alors l'équation différentielle (E)

3°)Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = -2x + 1$.

3°)On pose $u(x) = 2e^{x} - e^{4x}$.

Résoudre dans R l'inéquation $u(x) \geq 0$.

4°)On considère la partie de la courbe d'équation $y = u(x)$ pour $-1 \leq x \leq 0$. En la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, on délimite un solide dont le volume est mesuré en unités de volume

Calculer la valeur exacte de V.

EXERCICE N°9

Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température f(t) de la citerne vérifie l'équation différentielle $f' = a - bf$ avec $a = 2{,}088.10^{-2}$ et $b = 2{,}32.10^{-4}$ lorsque t est exprimé en secondes et f(t) en °C.

1°)a Montrer que y =f - 90 est solution de l'équation différentielle $y' = -by$ (1)

b. Donner la solution générale de (1)

c. En déduire l'expression de f(t) sachant que f(0)=20.

2°) Au bout de combien de temps la température atteint-elle 80°C ?

EXERCICE N°10

1°)Résoudre l'équation différentielle $4y''+49y = 0$.

2°)a) Déterminer la solution f vérifiant $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ et $f(\pi) = 1$.

b)Déterminer deux réels r et θ strictement positifs et $\varphi \in \left]-\pi, \pi\right[$ tels que $f(x) = r\cos(\theta x + \varphi)$

EXERCICE N°11

Partie A

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' = 2y + 4x$

1°) Soit et h la fonction définie sur R par : $h(x) = -2x - 1$

c) Vérifier que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) sur R.

d) Démontrer qu'une fonction f = g + h est solution de (E_1) sur R si et seulement si g est solution de :

(E_2) : $y' = 2y$ sur R.

2°) a) Déterminer les solutions g de l'équation différentielle (E_2) sur R.

b) En déduire les solutions f de (E_1) sur R.

3°) Déterminer la solution de (E_1) sur R vérifiant f(0) = 0.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote oblique.

2°) Etudier les variations de f sur R et dresser son tableau de variation complet sur R.

(On ne demande pas le tracé de la courbe (C_f))

EXERCICE N°12

Partie A

Soit l'équation différentielle : $y' + 2y = 4e^{1-2x}$ (E)

1°) Démontrer que la fonction u définie sur R par $u(x) = 4xe^{1-2x}$ est une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$ (E_0)

3°) Démontrer qu'une fonction v définie sur R est solution de (E) si et seulement si v – u est solution de (E_0).

4°) En déduire toutes les solutions v de l'équation (E).

5°) Déterminer la fonction v_0, solution de (E), qui prend la valeur -2e en 0.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = 2(2x - 1)e^{1-2x}$.

1°) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire que la courbe C_f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ admet une asymptote horizontale.

2°) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation complet.

3°) Justifier que l'équation f(x) = -1 admet une unique solution α sur R et donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.
4°) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3/2.
5°) Déterminer une équation de la tangente au point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
6°) Tracer la courbe C_f et les tangentes déterminées précédemment.
(unité : 2 cm sur chaque axe).

Partie C

Soit y = g (x) l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse a.
On note $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.
1°) a) Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de f'(x) et f'(a).
b) Montrer que : $\varphi''(x) = f''(x)$.
2°) Résoudre f''(x) = 0.
3°) Dans cette question, on pose : a = 3/2.
a) Déterminer les variations de φ' et en déduire le signe de $\varphi'(x)$.
b) Déterminer les variations de φ et en déduire le signe de $\varphi(x)$.
c) Déterminer la position de C_f par rapport à sa tangente T.

EXERCICE N°13

1°) Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x + \dfrac{1 - k e^x}{1 + k e^x}$.
a) Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle : (E) : $2y' = (y - x)^2 + 1$.
b) En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.
2°)On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$
Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation y = x − 1, la droite D ' d'équation y = x + 1 et plusieurs courbes C_k correspondant à des valeurs particulières de k.
Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O puis celui associé à la courbe C ' passant par le point A de coordonnées (1 ; 1).
3°) On remarque que, pour tout x réel, on a : $f_k(x) = x - 1 + \dfrac{2}{1 + k e^x}$ (1) et $f_k(x) = x + 1 - \dfrac{2 k e^x}{1 + k e^x}$ (2).
En déduire pour tout k strictement positif :
- la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D '.
- les asymptotes de la courbe C_k .

EXERCICE N°14

Partie I :On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :
$(E_n) : y'+y = \dfrac{x^n}{n!} e^{-x}$.
1°)On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :
$g(x) = h(x) e^{-x}$.
a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel, $h'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.
b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que h(0) = 0.Quelle est alors la fonction g ?
2°) Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation : (F) : $y'+y = 0$.
b) Résoudre (F).
c) Déterminer la solution générale f de l'équation (E_n).

d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

1°) On pose, pour tout x réel, $f_0(x) = e^{-x}$, $f_1(x) = x\,e^{-x}$.

a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y'+y = f_0$.

b) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y'+y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la Partie I, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x} \ .$$

2°) Pour tout entier naturel n, on pose: $I_n = \int_1^0 f_n(x)dx$.

a)Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle [0 ; 1], $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$

b)En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$,puis déterminer la limite de la suite (I_n).

c) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = \frac{1}{k!}e^{-1}$.

d) Calculer I_0 et déduire que : $I_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

d) En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$.