Equation différentielle

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Equation différentielle

En mathématiques, une **équation différentielle** est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Sir Isaac Newton (left) and Gottfried Wilhelm von Leibniz (right)

La notion d'équation différentielle apparaît chez les mathématiciens à la fin du **XVII$^{\text{ème}}$ siècle**.

Leibniz sera *l'inventeur* en **1686**, en même temps que **Newton**, du *calcul différentiel et intégral*.

A cette époque, les équations différentielles s'introduisent en mathématique par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique.

Ce n'est qu'au **XX$^{\text{ème}}$ siècle** que les équations différentielles trouvent de nombreuses applications dans les Sciences de la Vie

RESUME DU COURS

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable sur un intervalle I et qui fait intervenir cette fonction et ses dérivées successives.

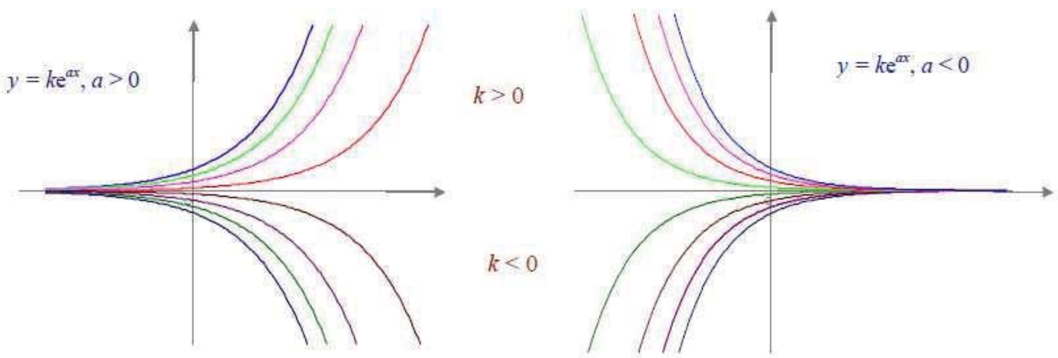
On a l'habitude d'appeler y la fonction inconnue d'une équation différentielle et y',y'', $y^{(3)}$, ... $y^{(n)}$ ses dérivées successives.

☑ Résolution de l'équation différentielle y'=ay, a≠ 0

Théorème 1 : solution de l'équation différentielle y'=ay, a≠ 0

Soit a un réel non nul. Les solutions dans R de l'équation différentielle y'=ay sont les Fonctions f_k définies par f_k (x) = k e^{ax} ou k est un réel.

Illustration



Théorème2 :

Condition initiale

Pour tout couple de réels $(x_0 : y_0)$, l'équation y' = ay admet une unique solution f_k telle que $f_k(x_0) = y_0$

.

La condition $f_k(x_0) = y_0$ est souvent appelée **condition initiale**

☑ Résolution dans IR de l'équation y' = ay + b , a≠ 0 , b≠ 0

Théorème 3 :

Les solutions dans R de l'équation différentielle y' = ay +b, a $\neq$ 0, b $\neq$ 0 sont les fonctions f_k définies pour tout réel x par $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, ou k est un réel quelconque.

☑ Résolution de l'équation différentielle y''+ ω^2 y=0

Théorème

L'ensemble des solutions sur R de l'équation différentielle $y''+w^2y=0$ avec $w \in R^*$ est l'ensemble des fonctions f_{k_1,k_2} telles que pour tout $x \in R$, $f_{k_1k_2}(x) = k_1 \cos wx + k_2 \sin wx$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_2 \in \mathbb{R}$

Remarque 1 :

On peut aussi écrire les solutions sous la forme

$f_{A\varphi}(x) = A\cos(wx+\phi)$ $avec$ $A \in R, \varphi \in R$

Exemple :

1°) Résoudre l'équation différentielle y '' + 9y =0

2°) trouver la solution de l'équation précédente qui satisfait les conditions $f(0)=1$ et $f'(x)=-2$.

Réponse

1°) Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $f_{k_1k_2}(x) = K_1 \cos 3x + K_2 \sin 3x$ avec

$k_1 \in R$, $K_2 \in R$

2°) Il s'agit de trouver une fonction f dont les constantes K_1 et K_2 vérifient les conditions imposées.

La condition $f(0)=1$ est équivalente à $f(0) = k_1 \cos 0 + k_2 \sin 0 = k_1 = 1 soit k_1 = 1$

De même, nous avons pour tout réel x, $f'(x) = -3k_1 \sin 3x + 3k_2 \cos 3x$

La condition $f'(\pi) = -2$ est équivalente à

$f'(\pi) = -3k_1 \sin 3\pi + 3k_2 \cos 3\pi = -3k_2 = -2 soit k_2 = \frac{2}{3}$

La solution cherchée est la fonction : $f_{1,\frac{2}{3}} : x \mapsto \cos 3x + \frac{2}{3} sin 3x$

Remarque 2 :

Une équation différentielle est d'ordre n si dans l'équation différentielle interviennent une fonction y ainsi que ses dérivées $y^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n