❄ Lycée Pilote Bourguiba Tunis ❄ ❄ 2021-2022 ❄

4ème Maths ❄ Le 27/10/2021

Devoir de contrôle N°1

Prof : Mme Gara - Mrs Masmoudi et Ben Regaya

Exercice 1 : 7 points

Dans l'annexe on a tracé la courbe ζ d'une fonction f définie sur $]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$.
f est continue sur $]-\infty,-1[$ et sur $]2,+\infty[$.
Les droites déquations respectives $x=-1$, $x=2$ et $y=-2$ sont des asymptotes á ζ. La courbe ζ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta : y=x$.

1. a) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}[f\circ f(x)-f(x)]$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{tan 2x}{x}\right)$

   b) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\leqslant -1$ et $f(x)\geqslant 0$.

2. a) Déterminer l'ensemble de définition de $f\circ f$.

   b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} f\circ f(x)$.

3. Soit $g(x)=\sqrt{x^2+3x}$ et $h(x)=g(3f(x))$.

   a) Déterminer l'ensemble de définition de h.

   b) Montrer que l'équation $h(x)=1$ admet dans $]-2,-1[$ une solution unique α.

   c) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{6}$.

4. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'équation : (E_n) : $f(x)=2+\dfrac{1}{n}$.

   a) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que $2<a_n<3$ et $b_n>3$.

   b) Étudier la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

   c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite.

Exercice 2 : 6 points

Le plan complexe est rapporté à un R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points $A(2)$ et $B(-2)$.
Soit f l'application qui à tout point $M(z\neq 2)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z'=\dfrac{\bar{z}(z-2)}{\bar{z}-2}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2. Ecrire z' sous forme exponentielle lorsque $z=1+e^{i\alpha}$ où $\alpha\in]0,2\pi[$.

3. a) Montrer que $OM=OM'$.

   b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $M'=B$.

   c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

(d) Montrer que si $M \notin (AB)$ alors $(AM) \perp (MM')$.

(e) Donner une construction du point M' connaissant M dans le plan privé de A.

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $z' = e^{i\theta}$ alors $z = \frac{4+5\cos\theta}{5+4\cos\theta} - \frac{3i\sin\theta}{5+4\cos\theta}$.

5. Soit n un entier tel que $n \geq 2$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_n) : $\bar{z}^n(z-2)^n = (\bar{z}-2)^n$.

Exercice 3 : 7 points

1. Soient f et g les fonctions définies sur $]-1,1]$ par :
$f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{x}{2} - 1$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x}{2} - 1$.

(a) Dresser le tableau de variations de f.

(b) En déduire que pour tout $x \in]-1,1]$, $\sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$.

(c) Montrer que pour tout $x \in]-1,1]$, $g'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}\right]$.

(d) Dresser le tableau de variations de g et en déduire que pour tout $x \in]-1,1]$,
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1 - \frac{x}{2}$.

2. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)u_{n-1}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

(b) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n\sqrt{n+1}$.
Montrer que la suite (v_n) est décroissante puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

(c) Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $w_n = u_n\sqrt{n}$.
Montrer que la suite (w_n) est croissante puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$u_n \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}$.

(d) Déterminer la limite de la suite u.

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

(f) Déterminer la limite de la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$.

2021/2022 Bac Maths Devoir de contrôle 1 LPBT

Annexe