❄ Lycée Pilote Bourguiba Tunis ❄ ❄ $4^{\text{éme}}$ Maths ❄

Le 03/12/2021 ❄ Durée 3 heures

Devoir de synthèse N°1

Prof : Mme Gara - Mrs Masmoudi et Ben Regaya

Exercice 1 : 3 points

Le plan complexe est muni d'un repère orothonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+i)z^2-2(\cos\theta-\sin\theta)z+1-i=0$. On écrira les solutions sous forme exponentielle.

2. Soit f l'isométrie qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= -x \end{cases}$$
   a. Montrer que $f = r_{\left(O;\frac{-\pi}{2}\right)} \circ S_{(O;\vec{u})}$.
   b. En déduire que f est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

3. On donne les points $M_1\left(e^{i\theta}\right)$ et $M_2\left(e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$.
   a. Déterminer l'ensemble des points M_1.
   b. En déduire l'ensemble des points M_2.

Exercice 2 : 5 points

OAB est un triangle rectangle en O inscrit dans un cercle ζ de centre I tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On note C le milieu de $[OA]$. La droite (IC) coupe ζ en D et E tel que $E \in \overset{\frown}{AB}$.

1. Montrer que IEB est un triangle équilatéral.

2. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et $g = S_{(IB)} \circ S_{(ED)}$.
   a. Caractériser g.
   b. Déterminer $R \circ g(A)$. En déduire que $R \circ g = S_C$.
   c. Montrer que $R(I) = D$. En déduire que C est le milieu de $[ID]$.

3. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme D en B et O en E.
   b. Soit $h = t_{\overrightarrow{BD}} \circ f$. Déterminer $h(D)$ et $h(O)$ puis caractériser h.

ⓒ Déterminer les droites Δ et Δ' telles que : $h = S_{(AD)} \circ S_{\Delta}$ et $t_{\overrightarrow{DB}} = S_{\Delta'} \circ S_{(AD)}$.

ⓓ Caractériser alors f.

4 ⓐ Montrer qu'il existe un unique antidéplacement k qui envoie D sur B et O sur E.

ⓑ On pose $\varphi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ k$. Montrer que φ est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

ⓒ Montrer que k est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite.

Exercice 3 : 5 points

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi[$ par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\cos x}$.

1 ⓐ Montrer que f réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

ⓑ Étudier la dérivabilité de f^{-1} et calculer sa dérivée lorsqu'elle existe.

ⓒ Montrer que pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left]0,\dfrac{\pi}{6}\right[$.

3 On considère la suite définie par : $u_0 = \dfrac{\pi}{6}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et on pose $S_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

ⓐ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

ⓑ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

ⓒ Déterminer la limite de la suite (u_n).

ⓓ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha - \dfrac{2}{n+1} \leqslant S_n \leqslant \alpha + \dfrac{2}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 4 : 7 points

Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^4}}$. On note ζ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1 ⓐ Étudier la dérivabilité de f à droite en (-1) et à gauche en 1.

ⓑ Dresser le tableau de variation de f.

ⓒ Étudier la position relative de ζ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

ⓓ Montrer que f réalise une bijection de $[-1,1]$ sur lui même.

ⓔ On note ζ' la courbe de f^{-1}. Tracer ζ et ζ'.

2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_1 = f$ et pour $n \geqslant 2$, $f_n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois).
Soit g une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et telle que :

- $g([0,1]) \subset [0,1]$.
- Il existe $a \in]0,1[$ tel que $g(a) = a$.
- Pour tout $x \in [0,1]$, $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = f_n(a)$.

(a) Montrer que $g(0) = 0$ ou $g(0) = 1$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(u_n) = u_n$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

(d) Déterminer $g(0)$.

3 Soit h la fonction définie sur $[0,\pi]$ par : $h(x) = f(\sqrt{sinx})$.

(a) Montrer que la droite d'équation : $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe Γ de h.

(b) Étudier les variations de h puis tracer Γ dans un autre repère.