DEVOIR DE CONTROLE EN MATHEMATIQUES N°2

Exercice 1(4pts)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient θ un réel de $]-\pi,\pi]$ et f l'application du plan dans luis même qui au point M(z) associe le point

$M_1(z_1)$ avec $z_1 = ie^{i\theta}z+2e^{i\theta}(1-i)$

1.a. Montrer que f est un déplacement .

b. Déterminer la valeur de θ pour que f soit une translation et donner l'affixe de son vecteur.

2. Soit g=foS, avec S la symétrie orthogonale d'axe la droite des abscisses

a. Justifier que g est un antidéplacement.

b. Soit M'(z')=g(M(z)). Justifier que z'= $=ie^{i\theta}\bar{z}+2e^{i\theta}(1-i)$

c. Soient A et B les points d'affixes respectives $1-i$ et $2-2i$.

Déterminer la valeur de θ pour laquelle on a: g(A)=A. Pour la valeur trouvé de θ, calculer l'affixe de g(B).

Caractériser alors g dans ce cas.

Exercice 2(5pts)(voir figure)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O , .On note E le symétrique de O par rapport à (AD) . H et K sont les symétriques de A par rapport à B et D respectivement. F le symétrique de D par rapport à K . Soient I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[BK]$.

1. Montrer que J est milieu du segment $[CD]$ et que la droite (IJ) est la médiatrice de $[AE]$

2. On désigne par R_B et R_D les rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ de centres respectifs B et D .

a. Déterminer $R_D o R_B(H)$

b. Caractériser $R_D o R_B$ en déduire que C est milieu de $[HK]$

3.a. Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que f(A) = D et f(B) = K .

b. Caractériser f

c. Montrer que EHF est isocèle et rectangle en E.

4. Soit φ l'antidéplacement tel que $\varphi(A)=D$ et $\varphi(B)=K$

a. Montrer que φ est une symétrie glissante.

b. Montrer que $\varphi(D)=C$.

c. Déterminer $\varphi o S_{(IJ)}(I)$ et $\varphi o S_{(IJ)}(E)$ en déduire la forme réduite de φ.

5. Pour tout point M n'appartenant pas à (AD) . On pose $\varphi(M)=M'$ et $f(M)=M''$.

Montrer que les points M′ et M′′ son symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 3(6pts)

Soit la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\sqrt{\tan x}$

On donne la courbe C_f de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

1.a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)$ et donner une interprétation graphique.

2.a. Montrer que la fonction f est bijective de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on déterminera.

On désigne par Γ la courbe de la fonction f^{-1} dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b. Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et préciser $(f^{-1})'(0)$.

c. Tracer la courbe Γ de la fonction f^{-1} dans le même repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3.a. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a $(f^{-1})'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$

En déduire que $f^{-1}(x)=2\int_0^x\frac{t}{1+t^4}dt$, $\forall x\in[0,+\infty[$.

4. Pour tout $t\in[0,+\infty[$ et $n\in IN^*$, on pose $\varphi(t)=f^{-1}(t^n)$; et $I_n=\int_0^1\frac{t^{2n-1}}{1+t^{4n}}dt$.

a. Verifier que $I_1=\frac{\pi}{8}$

b. Pour tout $t\in[0,+\infty[$, calculer $\varphi'(t)$ en déduire que pour tout $n\in IN^*$, $I_n=\frac{\pi}{8n}$

5. Pour tout $n\in IN^*$ on pose $J_n=\int_0^1\frac{t^{6n-1}}{(1+t^{4n})^2}dt$.

a .A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $J_n=\frac{-1}{8n}+\frac{1}{2}I_n$.

b. Utiliser les résultats précédentes pour calculer $A=\int_0^1\frac{t+2t^5}{(1+t^4)^2}dt$

Exercice 4(5pts)

Soit la fonction f definie sur $[0,\pi[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x\in]0,\pi[\\ f(0)=1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue à droite en 0.

2.a. Pour tout $x\in[0,+\infty[$ exprimer à l'aide de x les intégrales : $\int_0^x(1-\cos t)dt$, $\int_0^x(t-\sin t)dt$ et $\int_0^x(-1+\frac{1}{2}t^2+\cos t)dt$

En déduire que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x\le x$

b. Etudier alors la dérivabilité de f à droite en 0.

3.a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,\pi[$

b. Soit g la primitive de la fonction $t\to t\sin t$ sur $[0,\pi[$ qui s'annule en 0 , expliciter g(x) à l'aide de x .

en déduire le sens de variation de f sur $[0,\pi[$.

4. Soit h la fonction définie sur $]0,\pi[$ par : $h(x)=\ln(\tan(\frac{x}{2}))$, et on note $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{\sin x}dx$

Montrer que $h'(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ en déduire que $I=2\ln(1+\sqrt{2})$ (on donne : $\tan(\frac{3\pi}{8})=\dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{8})}=\sqrt{2}+1$)

5. Pour tout $x\in]0,\pi[$, on pose : $F(x)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{x}f(t)dt$ et $G(x)=F(\pi-x)+\pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{x}\frac{1}{\sin t}dt$

a. Montrer que F est dérivable sur $]0,\pi[$ puis calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.

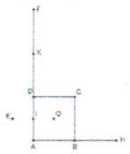
b. En déduire pour tout $x\in]0,\pi[$: $F(x)=F(\pi-x)-F(\frac{\pi}{4})+\pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{x}\frac{1}{\sin t}dt$

c. Calculer alors $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f(t)dt$

Nom ……………………………………………………………Prénom -----------------------------------N°--------------

L'élève doit compléter et rendre cette feuille

Exercice2



Exercice3