LPBT ★★★ LPM8

☆☆☆☆

Mme Gara et Mrs Lakhdar & Masmoudi & Ben Regaya

☆☆☆☆

Devoir de synthèse N°2

4ème Maths Epreuve : Mathématiques

Durée : 4h

Date : 25 / 02 / 2022

Exercice 1 : 02 points

Répondre par *vrai* ou *faux* en justifiant la réponse.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = n^4 + 1$. Il existe une valeur de n telle que 3 divise A_n.
2. a, b, c et d quatre entiers consécutifs et n un entier tel que $n \geqslant 2$. Si n est impair alors $(a^n + b^n + c^n + d^n)$ est un multiple de 4.
3. f et g deux similitudes directes et A un point donné. Si $f(g(A)) = g(f(A))$ alors $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 2 : 06 points

ABC un triangle équilatéral direct de côté 2. I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On note ζ le cercle circonscrit au triangle ABC et $D = S_B(A)$. (Voir figure).

1. a) Montrer qu'il existe une rotation unique R qui transforme C en B et J en K.
   b) caractériser R.
2. Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et C sur I.
   a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.
   b) Soit Ω le centre de S. Montrer que $\Omega \in \zeta$ et que Ω, A et I sont alignés. Construire alors Ω.
3. Soit $h = S \circ R$. Caractériser h.
4. Soit M un point de ζ distinct de Ω et A. On pose $M_1 = S(M)$ et $M_2 = R(M)$.
   a) Déterminer la nature du triangle $\Omega M M_1$.
   b) Montrer que la droite (MM_1) passe par un point fixe que l'on précisera.
   c) Montrer que les points M, M_1 et M_2 sont alignés.
5. On rapporte le plan au R.O.N.D $(K, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{KB}$.
   On note f la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = \frac{-1}{2}\bar{z} + \frac{1}{2}$.
   a) Montrer que l'écriture complexe associée à S est : $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{5+i\sqrt{3}}{4}$.
   b) Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport, l'affixe du centre ω et une équation de l'axe.
   c) Montrer que $f = S \circ S_{(AC)}$.
   d) En déduire l'écriture complexe associée à $S_{(AC)}$.

Exercice 3 : 04 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(E) : 2x^3 + 7y = 2022^n$$

1. Montrer que si (x,y) est solution de (E) alors $2x^3 \equiv (-1)^n \quad (mod 7)$. En déduire les restes possibles de $2x^3$ modulo 7.
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Déterminer les restes possibles de $2a^3$ modulo 7.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Partie B :

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7. On pose $A = p^4 - 1$.

1. Montrer que $A \equiv 0 \ (mod 3)$.
2. Montrer que $A \equiv 0 \ (mod 16)$.
3. Montrer que 240 divise A.

Exercice 4 : 08 points

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = x^3 ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On note (ζ) la courbe de f dans un $R.O.N$ $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

1.
   a. En appliquant les inégalités des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{1+x} \leqslant ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$.
   b. Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0.
   c. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = 3x^2\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)}\right]$.
   d. Dresser le tableau de variations de f.
2. Pour tout réel > 0, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
   a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)}\right]$.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.
3. Montrer que f admet une bijection réciproque h et tracer (ζ).

Partie B :

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $0 < u_0 < \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < u_n < \alpha$.
2.
   a. Montrer que $g(]0,\alpha[) =]0,1[$.
   b. En déduire que la suite (u_n) et strictement croissante.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie C :

On définie sur $[0,+\infty[$ la fonction F par : $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$.

1.
   a. Étudier le signe de $F(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   b. Déterminer le sens de variation de F.
   c. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $F(x) \leqslant (1-x)ln(2)$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
2.
   a. Montrer que pour $x > 0$, $F(x) = \frac{ln2}{.4} - \frac{x^4}{4}ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}dt$.
   b. En déduire que pour tout $x > 0$, $F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}ln(1+x) - \frac{x^4}{4}ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
3. Calculer l'aire, en unité d'aires, de la partie du plan délimitée par (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équtions respectives : $x=0$ et $x=1$.