Exercice 1 :(4 pts)

Les parties A , B et C sont indépendantes :

Partie A/ Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

1) On a $202101^{100} \equiv 1\ (mod101)$.

2)Les quatre derniers chiffres de l'entier x vérifiant : $1111(x - 7979) = 790000$ sont 2021

3) Soit x un entier naturel > 4.

On a : $(x - 4) \wedge (x + 4) = 1$ si et seulement si x est impair .

Partie B/Pour tout entier naturel n , on prend

1) Soit la suite (a_n) définie sur IN par :$\begin{cases} a_0 = 17 \\ a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2 , \text{ pour tout entier } n \in IN \end{cases}$

a) Montrer que $a_n \equiv 7\ (mod10)$; pour tout entier $n \in IN$

b) Montrer que $a_n \wedge a_{n+1} = 1$; pour tout entier $n \in IN$.

2) a) Montrer que $a_n = (2)^{2^{n+2}} + 1$; pour tout entier naturel n .

b)En déduire le chiffre des unités de l'entier $E = (2)^{2^{18}} + (2)^{2^{19}} + (2)^{2^{20}} + (2)^{2^{21}}$.

Partie C/On considère E l'ensemble des couples (n , m) dans Z² qui vérifient $\begin{cases} m^2 - n^3 = 16 \\ m \equiv 0 (mod2) \end{cases}$

1) a) Montrer que n est pair ,en déduire que $m^2 \equiv 0$ (mod8)
   b) Montrer que $n^3 \equiv 0$ (mod16), en déduire que $n \equiv 0$ (mod4)
2) a)Montrer qu'il existe un entier q tel que m= 8q+4 .
   b)Montrer que q et q+1 sont deux cubes parfaits.
3) Déterminer alors l'ensemble E.

Exercice 2 :(3 pts)

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées. La chaine A produit 40% des composants et la chaine B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur.

En sortie de chaine A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaine B, ils ne sont que 5%.On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. On note :

- A l'événement : « Le composant provient de la chaine A. »
- B l'événement : « Le composant provient de la chaine B. »
- S l'événement : « Le composant est sans défaut. »

1) Montrer que la probabilité de l'événement S est $P(S) = 0,89$
2) Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaine A. on donnera le résultat à 10^{-2} près.

3) Une entreprise achète 500 composants de l'usine. Les composants deux à deux indépendants On note X la variable aléatoire égale au nombre de composants n'ayant aucun défaut.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Donner le nombre moyen de composant sans défaut.

Exercice 3 :(4 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré de sens direct AKJI de centre O et on désigne par C et B les symétriques du point A respectivement par rapport à I et K.

1) Faire une figure.

2) Montrer que l'application f = $h_{(C\,,2)}\,o\,h_{(A\,,\frac{1}{2})}$ est une translation que l'on caractérisera.

3) a)Caractériser l'unique déplacement r et l'unique antidéplacement σ qui transforme A en J et J en C.
b)Caractériser les isométries for et foσ .

4) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (A , $\overrightarrow{AK}$,$\overrightarrow{AI}$).
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application g définie dans la plan par : g(M(z))= M'(Z') signifie que Z' = $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\,z$

5) Soit la suite des points M_n du plan définie par : $\begin{cases} M_0 = K \\ M_{n+1} = g(M_n)\,;\ \forall n \in IN^{*} \end{cases}$

a) Montrer que z_n l'affixe de M_n est une racine huitième de l'unité pour tout entier naturel n.
b) En déduire que les points M_n sont les sommets d'un polygone régulier centré en A.
c) Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par les arrêtes du polygone.
d) Soient n et p deux entiers naturels. A quelle condition sur n et p , les points A , M_n et M_p sont alignés ?

6) Répondre par vrai ou faux **en justifiant la réponse.**

a) Il existe au moins une symétrie glissante φ qui envoie A en B et la droite (AJ) en (BC).

Soit D le point tel que ABDC soit un carré .Le cercle de centre A et passant par B coupe le segment [AD] en E.

b) Il existe un unique déplacement R qui transforme A en D et E en B.
c) L'affixe du centre de R est $2\sqrt{2-\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$

Exercice 4 :(3 points) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit la fonction g_n la fonction définie sur $[n,+\infty[$ par $g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{lnt}dt$.

1) a) Montrer que pour tout $t > 0; \ln(t) \leq t-1$.

b) En déduire que pour tout x $\geq n;\ g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$.

c) Dresser alors le tableau de variation de g_n.

2) a) Montrer que g_n réalise une bijection de $[n,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Déduire que pour tout $n \geq 2$ il existe unique réel $a_n \geq n$ tel que $\int_n^{a_n} \frac{1}{lnt}dt = 1$.

3) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

Lycée Pilote de L'Ariana	***MATHEMATIQUES***	***4ème Maths***
27 Mai 2021	***Synthèse 2***	***Durée : 4 heures***

Exercice 5 :(6 points)

A/ Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$.

On note C_f la courbe dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité graphique 2cm).

1) Etudier les variations de f , En déduire l'intervalle f(IR) .

2) Tracer C_f.

3) Soit g la fonction définie sur$]0, \frac{\pi}{2}[$par g(x) = ln (tan(x)).

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que g admet une fonction réciproque notée h définie, continue et dérivable sur IR.

c) Montrer que $h'(x) = \frac{1}{e^{x}+e^{-x}}$, pour tout réel x .

d) Calculer alors en cm² l'aire de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations $(x = \frac{1}{2}\ln(3))$; $(x = -\frac{1}{2}\ln(3))$ et (y = 0).

B/ Soit n un entier naturel non nul .

1) Soit F_n la primitive de la fonction $(t \mapsto (f(t))^{n})$ sur IR qui s'annule en 0.

a) Montrer que F_n est impaire .

b) Montrer que pour tout réel $t \in [0, +\infty[$ on a : $0 < f(t) \leq 2e^{-t}$.

c) En déduire que la fonction $F_n : (x \mapsto F_n(x))$ admet une limite finie u_n lorsque x tend vers $+\infty$.

d) Vérifier que $u_1 = \frac{\pi}{2}$.

2) Vérifier que la fonction K définie par $K(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ est une primitive sur IR de la fonction f^2 définie par $(t \mapsto (f(t))^{2})$. En déduire u_2 .

3) a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel x de $[0, +\infty[$ on a :

$f^{n-1}(t)f'(t)\,K(t) = f^{n+2}(x) - f^{n}(x)$

b) A l'aide d'une integration par parties , montrer que :

$n\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)\,K(t)\,dt = K(x)(f(x))^{n} - F_{n+2}(x)$.

c) En déduire que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$(n+1)F_{n+2}(x) - n\,F_n(x) = K(x)\,f^{n}(x)$.

d) Montrer alors que pour tout entier naturel non nul , on a $(n+1)\,u_{n+2} = n\,u_n$.

4) a)Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$u_{2n+1} = \frac{(2n)!}{4^{n}(n!)^{2}}\frac{\pi}{2}$ et $u_{2n+2} = \frac{4^{n}(n!)^{2}}{(2n+1)!}$.

b)Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$. En déduire la limite de la suite $(\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}})$.

c)Déduire alors que la suite v définie par $v_n = (\frac{4^{n}(n!)^{2}}{(2n)!})^{2}(\frac{2}{2n+1})$est convergente vers π.