

Exercice N° 1 : (5 pts)

Une boîte A contient 4 boules portant les nombres $-2, -2, 0, 1$.

Une deuxième boîte B contient 4 boules portant les nombres $-2, 1, 1, 0$.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire de chaque boîte une boule et on note X l'aléa numérique égale au produit des nombres marqués sur les deux boules obtenues.

a- Déterminer la loi de probabilité de X .

b- Calculer son espérance mathématique ainsi que son écart type.

c- Montrer que $P(x \geq 0) = \frac{3}{4}$

2) n étant un entier ≥ 2 . On répète l'épreuve précédente n fois de suite dans les mêmes conditions. On note Y l'aléa numérique égale au nombre de fois donnant un produit strictement positif.

a- Donner la loi de probabilité de Y .

b- Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un produit > 0 .

c- déterminer n pour que cette probabilité soit $\geq 0,9$.

3) On choisit une boîte au hasard et on tire une boule; quelle est la probabilité qu'elle porte le nombre 1.

Exercice 2: (5 pts)

Soit (C) un cercle de centre O et $[AB]$ un diamètre de ce cercle. On considère une parabole variable P tangente à (AB) en A et dont la directrice Δ passe par B .

1) a- Montrer que le foyer F de P appartient à $(C) \setminus \{A, B\}$.

b- Le foyer F étant donné, on note H le symétrique de F par rapport à (AB) .

Déterminer la directrice Δ de P .

2) On note T la tangente (C) en B et M le point d'intersection de (AF) et T .

Montrer que M est un point de P .

3) Soit Γ la parabole de même foyer F que P et de directrice (AB) . On désigne par I le milieu de $[BM]$.

a- Montrer que (OI) est la tangente à Γ en I .

b- Montrer que P et Γ ont une seule tangente commune que l'on déterminera.

Problème: (10 points)

Partie A

A tout entier naturel n , on associe la fonction numérique d'une variable réelle f_n définie

$$\text{sur } E \text{ par : } f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}.$$

- 1) a- Etudier les variations de la fonction f_n et les branches infinies de sa courbe représentative (C_n) . On fera un tableau de variation pour chacune des cas $n=0$, $n=1$ et $n \geq 2$.
b- Démontrer que lorsque n décrit E , les courbes (C_n) passent par un point fixe Ω que l'on déterminera.
- 2) a- Montrer que (C_0) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
b- Donner une équation de la tangente à (C_0) au point I .
c- Montrer que le point I est un centre de symétrie de (C_0) .
d- Construire (C_0) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 2cm).
- 3) a- Comparer pour tout réel x , $f_1(x)$ et $f_0(-x)$.
b- En déduire que $(C_1) = S_{(O, \vec{j})}(C_0)$. Tracer (C_1) dans le même repère que (C_0) .

Partie B

Soit (U_n) la suite définie sur E par : $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- 1) Montrer que pour tout n de E , $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$ (On pourra utiliser les variations de f_n).
- 2) Montrer que la suite (U_n) est convergente.
- 3) a- Calculer $U_1 + U_0$ et U_1 .
b- En déduire U_0 .
c- En déduire l'aire en cm^2 du domaine du plan limité par (C_0) et les droites d'équations $x=0$; $x=1$ et $y = \frac{1}{2}$.



d- En déduire l'aire en cm^2 du domaine du plan limité par (C_0) ; (C_1) et les droites d'équations $x=0$; $x=1$.

- 1) Sans Calculer U_n , démontrer que : Pour tout entier $n \geq 2$ $U_n + U_{n-1} = \frac{1 - e^{1-n}}{n-1}$.
- 2) En déduire :
 - a- La valeur de U_2 .
 - b- La limite de la suite (V_n) définie par $V_n = U_n + U_{n-1}$.
 - c- La limite de la suite (U_n) .

Partie C

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{f(-x)}{f_0(-x)(x+1)}$ et F la fonction définie sur

$[1; +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^{2\text{Log}x} g(t) dt$.

- 1)
 - a- Vérifier que pour $x \neq -1$, $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$.
 - b- Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout $x \in [1; +\infty[$.
 - c- Montrer que F est dérivable sur $[1; +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
 - d- En déduire que pour tout x de $[1; +\infty[$, $F(x) = \int_1^x \frac{2t}{1+2\text{Log}t} dt$.
- 2)
 - a- Montrer que $\forall t \in \mathbb{R} \forall, \text{ et } e^t \geq 1+t$.
En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.
 - b- Montrer que $\forall x \in]2; +\infty[$, $F(x) \geq \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{2t}{1+2\text{Log}t} dt$.
 - c- En utilisant le théorème de la moyenne, montrer que $\forall x \in]2; +\infty[$ il existe $c \in \left[\frac{x}{2}, x\right]$ tel que : $F(x) = \frac{c \cdot x}{1+2\text{Log}c}$.
 - e- En déduire que $\forall x \in]2; +\infty[$, $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{x}{2(1+2\text{Log}x)}$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.
 - f- Dresser le tableau de variation de F .
Donner l'allure de la courbe représentative (Γ) de F dans un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

