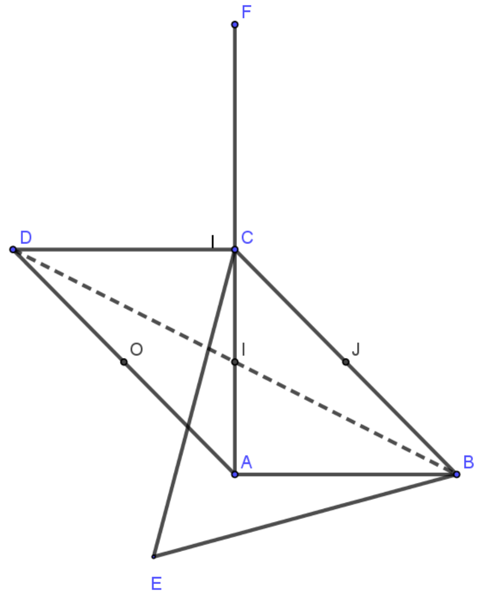
Ls mourouj 1	Devoir de synthèse n°3	Mr : Chahed
4éme math 2&3	Durée 4 h	2020/2021

Exercice 1 (4.5 pts)



Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB = AC = 1$

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

BCE est un triangle équilatéral direct ,

F est la symétrie de A par rapport a C

J est le milieu de $[BC]$ et O le milieu de $[AD]$

1)a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = F$

b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle

c) Déterminer $f(C)$ et montrer que O est le centre de f

2) Soit $g = R_{\left(B, -\frac{\pi}{6}\right)} o R_{\left(E, -\frac{\pi}{3}\right)}$. Déterminer $g(C)$ et caractériser g

3) Soit M un point du plan. On pose $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$

a) Caractériser gof^{-1}

b) Montrer que si M varie le milieu de $[M_1M_2]$ est un point fixe

c) Déterminer l'ensemble des point M tels que $M_1M_2 = AD$

4) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h tel que $h(A) = D$ et $h(B) = C$

b) Montrer que h est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

5) Le plan est rapporté a un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Soit Φ l'application du plan dans lui-même qui n'a tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z' tel que $z' = i\bar{z} + i$

a) Déterminer l'affixe du point E

b) Déterminer l'écriture complexe de f et vérifier que $\Phi = foS_{(AB)}$

c) Caractériser alors Φ

Exercice 2 (4.5 pts)

Monsieur A se déplace chaque jour, soit en vélo, soit en métro, avec les règles suivantes :

Si elle a pris son vélo un jour, il prend le métro le lendemain avec la probabilité 0.5 .

Mais si elle a pris le métro, alors il ne le reprend le lendemain qu'avec la probabilité 0.25 .

On note M_n l'´évènement ≪ il prend le métro le jour n ≫, et $p_n = p(M_n)$.

On suppose qu'il prend son vélo le jour 0, de sorte que.$p_0 = 0$

1. a) Donner p_1 ,$p(M_2 / M_1)$, $p(M_2 / \overline{M_1})$et calculer. p_2
   b) Montrer que pour tout entier naturel n ; $p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n$
2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturels par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique
   b) Exprimer u_n puis

3. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants
   A : ≪ Monsieur A prend le métro le jour 6 et le jour 7 ≫
   B : ≪ Monsieur A prend le métro le jour 6 ou le jour 7 ≫
   C : ≪ Monsieur A prend son vélo le jour 5 et le métro le jour 6 ≫

4. la compagnie du métro effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets.

On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Un trajet coûte 2 dinars. En cas de fraude, l'amende est de 40 dinars. Monsieur A fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Monsieur A a été contrôlé.

a) On suppose que p = 0, 05. Déterminer la loi de probabilité de x et calculer $E(X)$

b) On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Monsieur A .

Exprimer Y en fonction de X, puis calculer $E(Y)$ l'espérance de Y .

c) On ne connait plus la valeur de p.

Pour quelles valeurs de p la fraude systématique est-elle favorable à . Monsieur A

Exercice3(4 pts)

Partie A

1) Soit n un entier naturel non nul on considère l'équation $E: 2^n = n^2$

a) Montrer que pour tout $n \geq 5$ on a $2^n > n^2$

b) En déduire l'ensemble des solutions de E

2) Soit a et b deux entier naturel non nuls. On considère l'équation $F: a^b = b^a$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f: x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

b) Montrer que (a, b) est une solution de F si est seulement si $f(a) = f(b)$

c) En déduire l'ensemble des solutions de F

Partie B

Soit n un entier naturel on considère l'équation $E_n: x^2 + y^2 = 2^n$, x et y sont deux entiers naturels non nuls

1) Soit a et b deux entier naturel non nuls. Montrer que si $a^2 + b^2 \equiv 0[4]$ alors a et b sont pairs

2) a) Vérifier que E_0 n'admet pas de solution

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si E_{2n} admet des solutions alors $E_{2(n-1)}$ admet des solutions. Conclure

3) Montrer par récurrence que $(2^n, 2^n)$ est l'unique solution de E_{2n+1}. Conclure

Exercice 4 (7 pts)

Partie A

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln(x)$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$

et que $3,5 < \alpha < 3,6$ et en déduire le signe de $g(x)$

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln(x)}{1+x^2}$ et C sa courbe représentative

a) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f et Vérifier que $f\left(\sqrt{\alpha}\right)=\frac{1}{2\alpha}$

c) Tracer C (on prendra $\alpha=3.5$)

Partie B

1)Soit h la fonction définie sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=tan(x)$

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

b) Soit ψ la fonction réciproque de h. Montrer que ψ est dérivable sur J et que $\psi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

2) Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a $F(x)=F\left(\frac{1}{x}\right)$

3)a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt=\left(\psi\,(x)+\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right)ln(x)-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\psi\,(t)}{t}dt$$

b) montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a : $\psi\,(x)+\psi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

c) En déduire que $x\in]0,+\infty[$ on a $ln(x)=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\psi\,(t)}{t}dt$

Partie C

1) Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $G(x)=\int_0^x\psi\,(t)dt$

A l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a $G(x)=x\psi\,(x)-\frac{1}{2}ln(1+x^2)$

2) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\psi\left(\frac{k}{n}\right)$ et $v_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\psi^2\left(\frac{k}{n}\right)$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $0\le v_n\le\frac{\pi^2}{16n}$ et déterminer la limite de v_n

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\{0,1,2,\dots\dots n-1\}$ on a

$$\frac{1}{n}\,\psi\left(\frac{k}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\psi\,(t)dt\le\frac{1}{n}\,\psi\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

c) En déduire que $u_n-\frac{\pi}{4n}\le\frac{\pi}{4}-ln\left(\sqrt{2}\right)\le u_n$ et déterminer la limite de u_n

3) On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n=\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\psi\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

a) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a $x-\frac{x^2}{2}\le ln(1+x)\le x$

b) En déduire que $u_n-\frac{1}{2}v_n\le ln(S_n)\le u_n$ et déterminer la limite de S_n