Lycée Secondaire 7 Novembre **Classe :** 4ème Math	Devoir de synthèse N°° °3	**Prof : Mr M. Chahed** Année scolaire : 2003/2004

Exercice N° 1 : (5 pts)

Une boite A contient 4 boules portant les nombres $-2,-2,0,1$.

Une deuxième boite B contient 4 boules portant les nombres $-2,1,1,0$.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire de chaque boite une boule et on note X l'aléa numérique égale au produit des nombres marqués sur les deux boules obtenues.

   a- Déterminer la loi de probabilité de X.

   b- Calculer son espérance mathématique ainsi que son écart type.

   c- Montrer que $P(x \geq 0) = \frac{3}{4}$

2) n étant un entier ≥ 2. On répète l'épreuve précédente n fois de suite dans les mêmes conditions. On note Y l'aléa numérique égale au nombre de fois donnant un produit strictement positif.

   a- Donner la loi de probabilité de Y.

   b- Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un produit >0.

   c- déterminer n pour que cette probabilité soit $\geq 0,9$.

3) On choisit une boite au hasard et on tire une boule; quelle est la probabilité qu'elle porte le nombre 1.

Exercice 2: (5 pts)

Soit (C) un cercle de centre O et $[AB]$ un diamètre de ce cercle. On considère une parabole variable P tangente à (AB) en A et dont la directrice Δ passe par B.

1) a- Montrer que le foyer F de P appartient à $(C)\backslash\{A,B\}$.

   b- Le foyer F étant donné, on note H le symétrique de F par rapport à (AB).

   Déterminer la directrice Δ de P.

2) On note T la tangente (C) en B et M le point d'intersection de (AF) et T.

   Montrer que M est un point de P.

3) Soit Γ la parabole de même foyer F que P et de directrice (AB). On désigne par I le milieu de $[BM]$.

   a- Montrer que (OI) est la tangente à Γ en I.

b- Montrer que P et Γ ont une seule tangente commune que l'on déterminera.

Problème: (10 points)

✍ Partie A

A tout entier naturel n, on associe la fonction numérique d'une variable réelle f_n définie sur E par : $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$.

1) a- Etudier les variations de la fonction f_n et les branches infinies de sa courbe représentative (C_n). On fera un tableau de variation pour chacune des cas $n=0$, $n=1$ et $n\geq 2$.

   b- Démontrer que lorsque n décrit E, les courbes (C_n) passent par un point fixe Ω que l'on déterminera.

2) a- Montrer que (C_0) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

   b- Donner une équation de la tangente à (C_0) au point I.

   c- Montrer que le point I est un centre de symétrie de (C_0) .

   d- Construire (C_0) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2cm).

3) a- Comparer pour tout réel x, $f_1(x)$ et $f_0(-x)$.

   b- En déduire que $(C_1)=S_{(O,\vec{j})}(C_0)$. Tracer (C_1) dans le même repère que (C_0).

✍ Partie B

Soit (U_n) la suite définie sur E par : $U_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1) Montrer que pour tout n de E, $0\leq U_n\leq\frac{1}{2}$ (On pourra utiliser les variations de f_n).

2) Montrer que la suite (U_n) est convergente.

3) a- Calculer U_1+U_0 et U_1.

   b- En déduire U_0.

   c- En déduire l'aire en cm^2 du domaine du plan limité par (C_0) et les droites d'équations $x=0$; $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$.

d- En déduire l'aire en cm^2 du domaine du plan limité par (C_0) ; (C_1) et les droites d'équations $x=0\,;\,x=1$.

1) Sans Calculer U_n, démontrer que : Pour tout entier $n \geq 2$ $U_n+U_{n-1}=\dfrac{1-e^{1-n}}{n-1}$.

2) En déduire :

a- La valeur de U_2.

b- La limite de la suite (V_n) définie par $V_n=U_n+U_{n-1}$.

c- La limite de la suite (U_n).

✍ Partie C

Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{f_1(-x)}{f_0(-x).(x+1)}$ et F la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^{2Logx} g(t)dt$.

1) a- Vérifier que pour $x \neq -1$, $g(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

b- Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout $x\in[1;+\infty[$.

c- Montrer que F est dérivable sur $[1;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

d- En déduire que pour tout x de $[1;+\infty[$, $F(x)=\int_1^x \dfrac{2t}{1+2Logt}dt$.

2) a- Montrer que $\forall t\in IR$ $\forall$, et $e^t \geq 1+t$.

En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$.

b- Montrer que $\forall x\in]2;+\infty[$, $F(x) \geq \int_{\frac{x}{2}}^{x} \dfrac{2t}{1+2Logt}dt$.

c- En utilisant le théorème de la moyenne , montrer que $\forall x\in]2;+\infty[$ il existe $c \in \left[\dfrac{x}{2},x\right]$ tel que : $F(x)=\dfrac{c.x}{1+2Logc}$.

e- En déduire que $\forall x\in]2;+\infty[$, $\dfrac{F(x)}{x} \geq \dfrac{x}{2\,(1+2Logx)}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

f- Dresser le tableau de variation de F .

Donner l'allure de la courbe représentative (Γ) de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$