Ministère de l'éducation ☆☆☆☆ Lycée Pilote Bourguiba Tunis ☆☆☆☆ EPREUVE : MATHEMATIQUES	Devoir de synthèse N°2
	4ème ANNÉE SECTION : Mathématiques
	Durée : 4h — Date : 27 / 05 / 2021

Exercice 1 : (points)

ABC est un triangle rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AB = 2AC = 2$. On note I le milieu de $[AB]$. (Voir figure de l'annexe).

1) a) Montrer qu'l existe un seul déplacement f qui envoie A sur I et C sur B .
   b) Préciser son angle et construire son centre Ω.
2) Soit Δ la médiatrice de $[\Omega A]$, O un point de Δ non situé sur (ΩA). Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et passant par A recoupe la droite (AC) en M et la droite (AB) en N . Montrer que le triangle ΩMN est rectangle isocèle.
3) Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$. Déterminer l'écriture complexe de f et en déduire l'affixe de Ω.
4) On pose $g = foS_\Delta$ et $h = S_\Delta ofoS_\Delta$.
   a) Déterminer $g(A)$ et $g(\Omega)$. Caractériser alors g.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de foh.
   c) Caractériser alors h.

Exercice 2 : (points)

On considère deux urnes :

U_1 contenant trois boules blanches numérotées 1, 1, 1 et deux boules noires numérotées 2, 2 .

U_2 contenant deux boules blanches numérotées 2, 2 et trois boules noires numérotées 1, 1, 1.

1) On tire simultanément et au hasard 2 boules de U_1 et une boule de U_2.
   a) Calculer la probabilité des événements suivants :
      A : "Obtenir trois boules blanches".
      B : "Avoir les deux couleurs".
   b) Sachant qu'on a obtenu trois boules de deux couleurs, qu'elle est la probabilité d'avoir extrait de U_2 une boule numérotée 2.
2) On tire une boule de U_1 et on regarde sa couleur puis on la remet dans U_1 et on définit l'aléa numérique X par :
   * Si elle est blanche : on tire simultanément deux boules de U_1 et X prend la somme des numéros marqués.
   * S'il elle est noire : on tire successivement sans remise deux boules de U_2 et X prend le produit des numéros marqués.
   a) Déterminer les valeurs de X et montrer que $p(X = 4) = \frac{1}{10}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son écart type.

3) On répète l'épreuve précédente trois fois de suite en remettant les boules tirées dans leurs urnes après chaque épreuve.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois $(X=4)$.

b) Quelle est la probabilité au moins une fois $(X=4)$.

4) On effectue maintenant des essais indépendants et on note Y l'aléa numérique qui compte le nombre de coups nécessaires n pour obtenir pour la première fois $(X=4)$.

a) Calculer $p_n = p(Y=n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$.

c) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $S_n > 0{,}9$.

Exercice 3 : (points)

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = 7^{4n} + 7^{4n+1} + 7^{4n+2}$ et on considère l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

(E_n) : $A_n x - 100y = 1$.

a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de 7^n par 100.

b) En déduire les deux derniers chiffres de A_n.

c) Montrer que si (x,y) est solution de (E_n) alors $x \equiv 93 \pmod{100}$.

d) Résoudre alors (E_0).

2) Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier supérieur ou égal à 5 tel que : $a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

a) Montrer que $a^3 \equiv 1 \pmod{p}$.

b) Montrer que $(a+1) \wedge p = 1$ et $(a-1) \wedge p = 1$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k \equiv 1 \pmod{p}$. Montrer que 3 est la plus petite valeur de k.

d) En utilisant le petit théorème de Fermat, montrer que $p \equiv 1 \pmod{3}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \left(3(n!)\right)^2 + 3(n!) + 1$.

a) Montrer que a_n admet un diviseur premier $p_n > n$.

b) Montrer que $p_n \equiv 1 \pmod{3}$.

c) Déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $3q+1$, $q \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 : (points)

A) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g_n(x) = \dfrac{x}{x+n} - ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

1) Dresser le tableau de variations de g_n. 9En déduire le signe de $g_n(x)$ pour $x \geqslant 0$.

2) a) Montrer que g_1 réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Tracer les courbes de g_1 est sa réciproque dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 \geq 1 + x$.

4) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

B) Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{x}\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right), \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 1 \end{cases}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{C}_n$ la courbe de f_n dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n à droite en 0.

2) Dresser le tableau de variation de f_n.

3) Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ après avoir étudier leur position relative.

4) Soit $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) En utilisant $f_n(1)$ et $g_n(1)$, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq e-u_n\leq \frac{e}{n}$.

c) Déterminer la limite de u.

C) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note G_n la primitive de f_n sur $\mathbb{R}^+$ qui s'annule en 1 et on pose pour $x\geq 0$: $F_n(x) = G_n(e^x)$.

1) Montrer que F_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $F_n'(x) = n\ln\left(1+\frac{e^x}{n}\right)$.

2) En déduire que pour $x\geq 0$, $F_n(x) = nx\,ln\left(1+\frac{e^x}{n}\right) - n\int_0^x \frac{te^t}{n+e^t}dt$.

3) Montrer que pour $x\geq 0$, $F_n(x) \geq nx\,ln\left(1+\frac{e^x}{n}\right) - n\frac{x^2}{2}$.

4) Dresser le tableau de variation de F_n.

Nom et Prénom : . . . .

Classe : . . . .

<u>Annexe :</u>