Lycée Pilote de Sousse | Mr.Hedi Souissi

EXERCICES : Continuité et Limites – 4MetSc

Exercice 1 :

Calculer *a, b* et *c* pour que *f* soit continue en 3

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & si\ x>3 \\ f(x)=\dfrac{-4+cx^2}{x-2} & si\ x<3 \\ f(3)=2 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} (1+3a)x^2-3x\ \ si\ x\le {}^1/_2 \\ \dfrac{x^3-8}{2x^2-5x+2}\ ,si\ {}^1/_2<x<2 \\ \sqrt{4x^2-1}-ax-1\ ,si\ x\ge 2 \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f calculer ses limites en $+\infty$; $-\infty$; $\frac{1}{2}$ $et\ en\ 2$.
2) Peut-on déterminer a pour que f soit continue en 2 ?
3) Etudier suivant les valeurs de a , la continuité de f sur IR .

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3x+sinx}{x-1}$$

Montrer que :

$$\text{pour tout } x\in[2,+\infty[\text{ on a ; } |f(x)-3|\le\frac{4}{x-1}$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4:

1) Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+cosx}{1+\sqrt{x}}$$

Montrer que pour tout réel x strictement supérieure à 0 on a : $\frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}\le f(x)\le 1$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{x}{3x+2\sin x}$.
   a) G est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   b) Montrer que pour tout $x\ge 1$,

$$\frac{x}{3x+2}\le g(x)\le\frac{x}{3x-2}$$

   En déduire la limite de g en $+\infty$.

3) a) montrer pour tout réel x :

$$\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\cos x}\le 1$$

b)En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(2-\cos x)}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2(2-\cos x)}\ \ et\ \ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{(2-\cos x)}$$

Exercice 5

Pour chacune des questions suivantes cocher la réponse exacte

1/ $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

a) est égale à 0 b) est égale à π c) n'existe pas

2/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan\left(\frac{\pi x^2}{2x^2+1}\right)$

a) est égale à 0 b) est égale à $+\infty$ c) est égale à $-\infty$

3/ L'équation : $3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$ admet dans l'intervalle [0,1]

a) aucune solution b) une seule solution c) deux solutions

4/ f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^2\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ admet au voisinage de $+\infty$:

a) une branche infinie parabolique de direction la droite $D(O,\vec{i})$

b) une branche infinie parabolique de direction la droite $D(O,\vec{j})$

c) une asymptote horizontale

Exercice 6

1) Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x + \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq \frac{1}{x^2}$; En déduire la limite de f, à droite en 0 .

2) Soit la fonction définie par

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \leq 1 - \frac{1}{x^2}$ En déduire la limite de f, lorsque x tend vers 0 .

3)

Soit la fonction définie par : $f(x) = 2x + 1 + 3\sin x$.

a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{R}$, $2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$.

b) En déduire les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ *et en* $-\infty$.

4) Montrer que pour tout , $x \in \mathbb{R}^*$; $1 - x^2 \leq 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 + x^2$

En déduire $\lim_{x\to 0}\left[1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^4+\sin x}{x^2+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,tg\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-x)}{(x^2-x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2-x)}{(x^2-x)}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4\left(1-\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Exercice 8:

1) Montrer que l'équation $x^3 - 2 = -x^2 - x$, possède une solution α unique dans $\mathbb{R}$.
2) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Exercice 9 :

Soit la fonction définie par : $f(x) = x^5 - 5x - 5$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire le nombre de solutions de l'équation *f(x) = 0* ; dans$\mathbb{R}$.
3) Encadrer la(ou les) solution(s) au centième près .