Exercice n°1 :

Déterminer les limites de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1- $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2+x}$ quand x tend vers 2 ; vers 1 ; vers $+\infty$; vers $-\infty$

2- $f(x)=2x-\sqrt{4x^2-3}$ quand x tend vers $+\infty$; vers $-\infty$

3- $f(x)=\sqrt{2x^2-7x+5}-2x+1$ quand x tend vers $+\infty$; vers $-\infty$

4- $f(x)=x-\sqrt{x^2-5x-1}$ quand x tend vers $+\infty$; vers $-\infty$

5- $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ quand x tend vers 1, vers $+\infty$; vers $-\infty$

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1} & \text{si } x\in]-\infty,0] \\ f(x)=x+\sqrt{x^2+x+1} & \text{si } x\in]0,+\infty[\end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Montrer que f est continue en 0.

2- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3-a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b- Montrer que la droite $\Delta : y=2x+\dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

Exercice n° 3 :

Soit $f : IR \to IR$; $x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2x-1 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{\sin 3(x-1)}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

1-a- Montrer que pour tout $x\in]1,+\infty[$: $\dfrac{-1}{x-1} \le f(x) \le \dfrac{1}{x-1}$.

b- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

2-a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b- Montrer que la droite $D : y=x-1$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

3- Montrer que f est continue sur IR.

Exercice n°4 :

Soit $f : IR \to IR$; $x \mapsto \begin{cases} x^2-\cos x & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x^2+1}-2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

1- Montrer que f est continue sur IR.

2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ et interpréter le résultat graphiquement.

3-a- Montrer que pour tout $x<0$: $x^2-1\le f(x)\le x^2+1$

b- En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

1- Etudier les variations de f sur $]1,+\infty[$

2- En déduire l'image de l'intervalle $]1,+\infty[$ par f.

3- Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1 & \end{cases}$

a- Montrer que g est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b- Montrer que pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$: $g(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ et en déduire que g est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\pi^2x+\sqrt{1-x}}{|x|+1} & \text{si } x\in\left]-\infty,1\right] \\ f(x)=\dfrac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2} & \text{si } x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}$

1-a- Monter que f est continue en 1.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.

c- Etudier la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

2- On admet que f est strictement décroissante sur $I=[1,3]$.

a- Montrer que l'équation $f(x)=4x$ admet dans I une unique solution α et que $1<\alpha<\dfrac{4}{3}$

b- Lequel des intervalles $I_1=\left]1,\dfrac{7}{6}\right[$ et $I_2=\left]\dfrac{7}{6},\dfrac{4}{3}\right[$ contient α ?

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur IR^* par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} & \text{si } x<0 \\ f(x)=\dfrac{x^2\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)}{x+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1- a- Montrer que pour tout réel $x>0$ on a : $|f(x)|\le x$.

b- En déduire la limite de f à droite en 0.

c- Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.

2- Montrer que f est continue sur IR_+^*

3- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

4- Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

a- Montrer que g est continue sur $]1,+\infty[$.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

Exercice n°1: Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=-1+\sqrt{x+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right) & \text{si } x\in]-1,+\infty[\\ f(-1)=-1 \end{cases}$

1- Montrer que f est continue sur $[-1,+\infty[$.

2- Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$.

3-a- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans]0, 1[une solution α.

b- Vérifier que $\tan\left(\dfrac{\pi}{\alpha+1}\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{\alpha}}$. !

Exercice n°2: Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3x}-3 & \text{si } x\in]-\infty,1] \\ 2x-3-\dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}$

1- ~~Déterminer l'ensemble de définition de f.~~

2- Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

3- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans]1, 3[.

4- Soit g la fonction définie sur [0, 1] par $g(x)=f\left(1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)$. Montrer que g est continue sur [0, 1].

Exercice n°3 : Soit la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+2}-x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

1- Calculer la limite de f en $+\infty$

2- Montrer que pour tout x de $]-\infty,1[$ on a : $\dfrac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.

3- Montrer que f est continue sur IR.

4- ~~Soit g la fonction définie sur~~ $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ si $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

Montrer que g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice n°4 :

1-a- Montrer que pour tout réel x, on a : $|x|<\sqrt{x^2+1}$

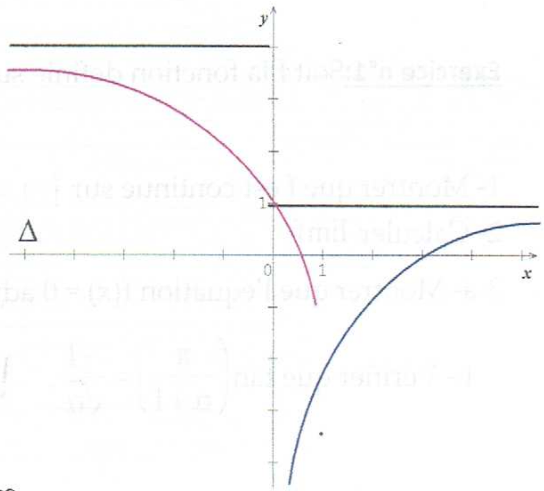
b- En déduire que pour tout réel x, on a : $-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{1}{4}+\dfrac{x}{4\sqrt{x^2+1}}<0$

2- Soient la fonction $f : x\mapsto\left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{x}{4\sqrt{x^2+1}}\right)\pi$ et la fonction $g : x\mapsto \tan(f(x))$

a- Montrer que g est continue sur IR.

b- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{+\infty} g$; $\lim\limits_{-\infty} g$.

Exercice n°1:



- (C) est la courbe d'une fonction f continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ C'

- La droite $\Delta : y=1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

- L'axe des abscisses est une asymptote à (C)

- (C') est la courbe d'une fonction g continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$.

- La droite $\Delta' : y=4$ est une asymptote à (C') au voisinage de $-\infty$

1- Par une lecture graphique déterminer :

a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

b- Déterminer : $fog(0)$, $gof(3)$ et $f(]0,+\infty[)$.

2- Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x)=g\circ f(x) & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ h(0)=4 \end{cases}$

a- Montrer que h est continue sur $[0,+\infty[$.

b- Montrer que h est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}-1 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1-x+\sqrt{x}\cos x}{x+1} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-a- Montrer que pour tout $x\geq 0$: $\dfrac{1-x-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1-x+\sqrt{x}}{x+1}$.

b- En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter le résultat graphiquement le résultat.

2- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+x]$ et interpréter le résultat graphiquement le résultat.

3- Montrer que f est continue sur IR.

4- On admet que f est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

5- Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1 \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice n°1:

Déterminer les limites suivantes :

1- $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 3x} + x$.

2- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - 2x$.

3- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x - 2}$.

4- $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice n°2:

Soient f la fonction définie sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{4x^2 - 1}$ et g la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2\sin(\pi x)}$.

On considère la fonction h définie sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ par $\begin{cases} h(x) = f \circ g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$.

1- Montrer que h est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Exercice n°3:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1 - \cos(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1 - x}{\sqrt{1 + x^2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2- Montrer que f est continue en 0.

3- On admet que f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$

a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$.

b- Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α

4- On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction h définie sur IR par : $h(x) = \dfrac{1 - x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

a- Déterminer : $h \circ h([1, +\infty[)$.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} h(x)\right)}$.