Lycée Pilote Ariana	*Limite & Continuité*	*2014/2015*
MR : LATRACH	*Ce qu'il y a de plus beau dans la vie, et dans toute espèce de vie, c'est sa continuité.* *[Sylvie Angel]*	$4^{ème}$ *Math*

Exercice1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\dfrac{\pi(x+1)}{2x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{1-x}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x}-\sin x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(\frac{1}{x})$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-2\sin x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$

Exercice :2

$b\in$ IR et f une fonction définie et dérivable sur $[b, +\infty[$, telle que $\forall\ x \geq b$, on a : $f'(x) \geq 2$.

1)Mque $\forall\ x \geq b$, $f(x) \geq 2(x-b) + f(b)$

2)En déduire la limite de f en $+\infty$.

3)Mque l'on peut déterminer des réels m et M que l'on précisera, tels que

$\forall\ x\in IR : m \leq \dfrac{1}{2-\sin x} \leq M$

En, déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2-\sin x}$

Exercice 3:

Soit $f(x)=\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$ sur $[2, +\infty[$

a)Mque $|f(x)-3| \leq \dfrac{4}{x-1}$

b)En déduire la limite de f en $+\infty$

Exercice 4:

Vrai ou Faux

La fonction f est donnée par son tableau de variation et tel que f(0)=2 et f(2)=0

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
f(x)	0 ↗ 3 ↘ $-\infty$

g est la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$ alors :

a)gof est continue sur IR- ;

b)gof est continue sur IR ;

c) fog est continue sur IR*

d)$\lim_{-\infty} gof(x) = -\infty$

e) $\lim_{+\infty} gof(x) = -1$;

f) gof est prolongeable par continuité en 2

Exercice 5 (5 points)

Soit la fonction f définie sur IR par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{(1+x)\pi} & \text{si } x > -1 \\ \sqrt{x^2+x} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

1)Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+x)$.

2) Montrer que si $x \in]-1, +\infty[$, on a

$0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{(x+1)\pi}$.

3) déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$.

4) Etudier la continuité de f en -1.

5) Montrer que l'équation f(x) = 2x admet au moins une solution $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.

Exercice 6:

1) Montrer que l'équation (E) $x^7 - x^2 + 1 = 0$, a une seule solution sur $I = [-2, 0]$

2) M que : $f(x) = x^3 + 2x + 1$ s'annule dans IR.

3)Mque l'équation $2\cos x=x-1$ admet au moins une solution dans IR.

4) Mque l'équation $\sqrt{x} = \dfrac{5}{x-2}$ admet une unique solution dans IR.

Exercice 7; VRAI – FAUX

Soit f une fonction d'ensemble de définition [a, b] où a et b sont deux réels tels que f(a)=2 et f(b)=-1

1)L'équation f(x)=1 admet au moins une solution dans [a,b]

2)Si f est continue sur I, alors l'équation f(x)=1 admet au moins une solution dans [a,b]

3)Si f est strictement décroissante sur I, alors l'équation f(x)=1 admet au plus une solution dans [a, b]

Exercice 8:

$\forall n\geq 2$, soit $f_n(x)=x^n - nx+1$; $x\in[0, 1]$

1)Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}

2)Dque l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α.

Quel est la monotonie de la suite (α_n)

Exercice 9:

$n \in IN$, soit $f_n(x) = x^3 + 3(n+1)x + 1$, $x\in IR$

1)M qu'il existe unique réel $u_n \in]-1, 0[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2)Mque $\forall\ x \in]-1, 0[$ et $\forall n\in IN$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

3)Déduire que la suite u est convergente vers une limite que l'on calculera

Exercice 10:

Soit $f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$,

où n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1)a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $[1, +\infty[$

b) En déduire le signe de $f_n(\frac{2n}{n+1})$

2)a) M que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]\frac{2n}{n+1}, +\infty[$ une seule solution qu'on notera U_n

b) Vérifier que $\frac{2n}{n+1} < U_n < 2$, $n \geq 2$

c) En déduire la limite de la suite (U_n)

3)a) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$, on a :
$f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

b) En déduire que la suite (U_n) est croissante

Exercice 11:

Soit $n \geq 1$. on considère la fonction f_n définie par $f_n(x)= x^n+x^{n-1} + \ldots+x-1$

1)Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans [0, 1]

2)a) Vérifier que $f_{n+1}(a_n) \geq 0$.

b) Etudier alors la monotonie de la suite (a_n).

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente.

3)a)Montrer que pour tout n, $a_n - \frac{1}{2} = \frac{a_n^{n+1}}{2}$

b)En déduire la limite de la suite (a_n) (on pourra vérifier que $a_n \leq 0,7$ pour $n \geq 2$)

Exercice 12:

Soit $f(x)= x + 1 - \frac{1}{1+x^3}$

1) Dresser le tableau de variation de f

b) Soit $n \in IN^*$, montrer que l'équation $f(x)=n$ admet une solution x_n dans l'intervalle] n-1, n[

c)Mque la suite (x_n) est strictement croissante.

d) En déduire que (x_n) est non majorée.

2) Soit $g(x)=f(\frac{\sin x}{x})$; $x \in]0,\pi]$ et $g(0)=\frac{3}{2}$

Montrer que g est continue sur $[0,\pi]$

Exercice 13:

Pour tout $n \in IN^*$, on définit sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x - n\tan(x)$.

1) a)Mque pour tout n >0, l'équation $f_n(x) = -n$ admet dans $[0, \frac{\pi}{2}[$ une solution unique qu'on note u_n

b) Vérifier que pour tout n > 0,
$u_n \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ et que $\tan(u_n) = 1+\frac{u_n}{n}$.

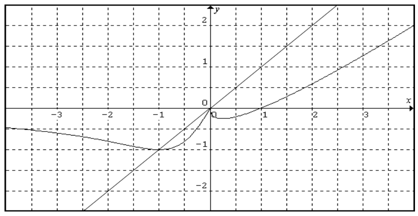
2) a) Mque pour tout n > 0 et pour tout $x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ on a : $1+ f_{n+1}(x) < f_n(x)$

b) Déduire alors que la suite (u_n) est strictement décroissante, et qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 14.

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR. C_f admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = 0$, C_f admet en $+ \infty$ une branche infinie de direction la droite y = x

1°) Donner chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.



2°) Déterminer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{x+1}{x})$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x^2)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sin[f(x)]}{\sqrt{f(x)}}$

3°) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

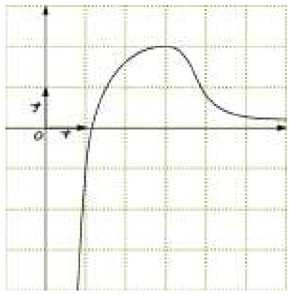
a) Déterminer l'ensemble de définition de g.

b) Montrer que C_g admet au moins trois asymptotes.

c) Déterminer l'image par g de l'intervalle [–1, 0[

Exercice 15 (3 points)

Soit f une fonction continue sur] 0, + ∞ [dont la courbe est la suivante : Calculer les limites suivantes :



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{3x+5}{x-1})$;

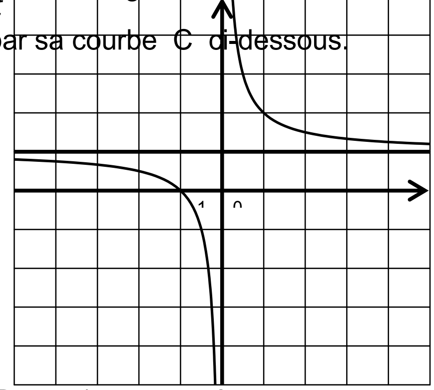
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(\sqrt{1-x})$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x f(\frac{1+x}{x})$

Exercice 16:

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1]\setminus\{0\}$ par :

$f(t) = \frac{\sqrt{1-t}-1}{t}$ Et g la fonction définie sur IR* et connue par sa courbe C ci-dessous.



Les droites D: y = 1 et Δ: x = 0 sont asymptotes à C

) a) Etudier la limite de f en 0 et en -∞

b) En déduire $\lim_{x\to 0}\dfrac{-1+\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}$.

2) a) Monter que pour tout $x\in]-\infty,1]\setminus\{0\}$:

$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 = 0$

b) Déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution $\alpha\in]-1,0[$

c) A l'aide de la calculatrice donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

3) a) Etudier les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty} fog(x)$; $\lim_{x\to+\infty} fog(x)$.

$\lim_{x\to-1^+} fog(x)$

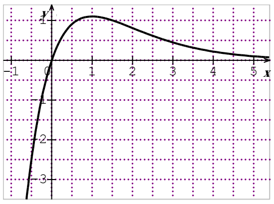
b) f o g est –elle continue sur]-∞, 0[?,(Justifie)

4) f o g est-elle prolongeable par continuité en -1.

Exercice17:

(QCM)

Pour chaque question choisir la seule réponse correcte

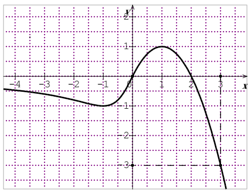


1)Soit f une fonction continue sur]- 1 , +∞[et dont la courbe est donnée ci- dessus.

$\lim_{x\to-\infty} f\left(\sqrt{1-x}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{2-x}{x}\right) = -1$

$\lim_{x\to+\infty} x.f\left(\dfrac{1-x}{2x}\right) = -\infty$



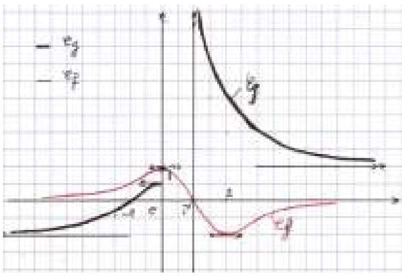
2)La courbe ci-contre Est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR. Cf admet au voisinage de:

- $-\infty$ une asymptote d'équation y = 0
- $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction la droite x = 0

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)}{1-x^2} = 0$. b) $\lim_{x\to0^+} xf\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$

c) fof(IR) = IR

Exercice 18:



On a tracé ci-contre, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes C_f et C_g représentatives de deux fonctions f et g.

1) Déterminer

a) L'image de]-∞; 1[par f.

b) Le domaine de définition de g o f.

2) Résoudre graphiquement gof(x) = 0.

3) Calculer : **a)** $\lim_{x\to1^+} gof(x)$, **b)** $\lim_{x\to+\infty} gof(x)$.

c) (gof)'(2).

4) Dresser le tableau de variation de g o f.

5) Soit l'équation (E) : g o f(x) = $\frac{1}{n}$, où n ≥ 3

a) Montrer que l'équation (E) admet une solution unique $a_n \in]1,2[$ et une solution unique $b_n > 2$.

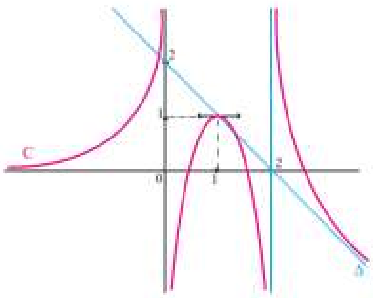
b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

c) Montrer alors que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Exercice 19: (5points)

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur **R** \ {0,2} et tels que $f(-\frac{1}{2}) = 1$

La droite Δ et les droites d'équations respectives x = 0 , x = 2 et y = 0 sont des asymptotes à la courbe C



1) Déterminer graphiquement.

a) $\lim_{x\to+\infty} f(\frac{2}{x})$, b) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x-1)$, c) $\lim_{n\to+\infty} f(\frac{3^n+1}{4^n+5})$

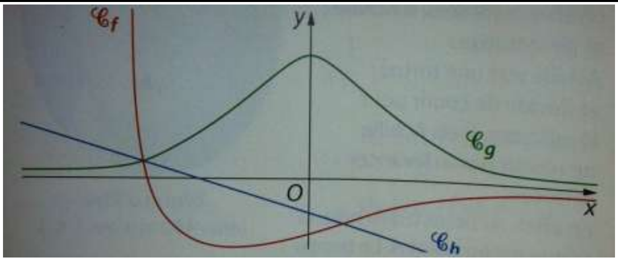
2) a) Montrer que f o f est continue sur $]-\infty,-\frac{1}{2}]$.

b) Etudier les variations de f o f sur $]-\infty,-\frac{1}{2}]$

c) Déduire que l'équation f o f(x) = 0 admet une seule solution dans $]-\infty,-\frac{1}{2}[$

Exercice 20 :(5 points)

Dans le graphique ci-dessous on a tracé les courbes Cf et Cg représentatives respectivement les fonctions f et g.



Cf admet

- une branche infinie de direction (oy) au voisinage de $-\infty$,

- l'axe (ox) asymptote au voisinage de $+\infty$

Cg admet

- l'axe (ox) une asymptote au voisinage de $\pm\infty$

1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to-\infty}(gof)$; $\lim_{x\to+\infty}(goh)$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{xf(x)}{x^2+1}$; $\lim_{x\to+\infty} f(2^n+\sin(n))$

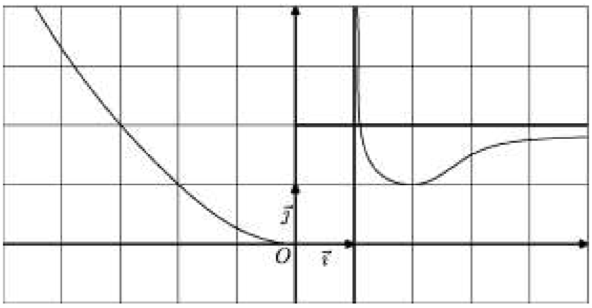
2) Soit u et v les suites définies sur IN par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$ Montrer que les suites u et v sont adjacentes

3) a) Montrer que f o g est continue sur IR-

b) Montrer que l'équation f o g(x) = x admet au moins une solution a dans IR-.

Exercice21 :

Soient g : [0,1] → [0,1] une application continue et strictement décroissante.



f : la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

I/ 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction g o f.

2) Dresser le tableau de variations de g o f sur [-2, 0].

3) Calculer les limites éventuelles suivantes :

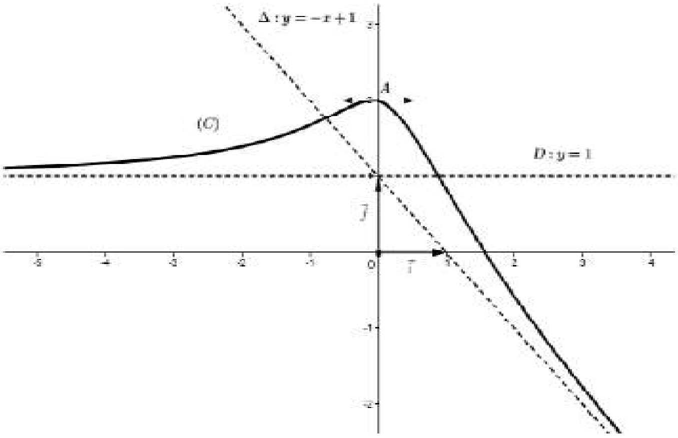
$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{2x}{x+1}\right)$, $\lim_{x\to0} f\left(\frac{\sin x+\tan 2x}{3x}\right)$; $\lim_{x\to-2^+} gof(x)$

Exercice 22 (4,5 points)

A) *Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.*

Soit f une fonction définie sur [-1, 5].

Si f est continue sur]- 1 , 5[et si f(-1).f(5) < 0 alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle]- 1, 5[.



B) On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction f définie et continue sur IR.

- La droite D : y = 1 est une asymptote à (C) au voisinage de - ∞.
- La droite Δ : y = -x + 1 est une asymptote à (C) au voisinage de + ∞.
- Pour tout réel x < 1, f(x) > 1.
- $f(2) = -\frac{1}{2}$

En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes.

1°) a) Déterminer les limites suivantes $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)+x$

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{f(x)-1}$ et $\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\right)f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

c) Calculer $\lim_{x\to0} f\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$ et $\lim_{x\to+\infty} fof(x)$

2°) Déterminer : $f\left(\left]-2,+\infty\right[\right)$ et $fof\left(\left]-\infty,+\infty\right[\right)$