## CALCUL DES LIMITES

**EXERCICE 1** Calculer les limites suivantes :

**1)** $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x^2-7x+10}{2x-10}\right)$ ; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{x^2-7x+10}\right)$

$\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{2x-10}{x^2-8x+15}\right)$ ; $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{2x-10}{x^2-8x+15}\right)$

**2)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-5x+4}\right)$ ; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}-3}{x^2-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{8-x}-2}\right)$ ; $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{|x+2|-6}\right)$

**EXERCICE 2** Déterminer dans chacun des cas suivants le domaine de définition de la fonction f puis étudier ses limites en $+\infty$ et $-\infty$

**1)** $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{2x+1}$

**2)** $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2+2x-3}$

**3)** $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2-3x}$

**4)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{2x+1}$

**5)** $f(x)=\sqrt{x^2-2x}-3x$

**6)** $f(x)=\sqrt{x^2+4x}+x$

**EXERCICE 3**

On considère la fonction $f_m$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_m(x)=\frac{(m-2)x^3+3mx^2-4x-6}{x^2-1}$$

Où m est un paramètre réel

**1)** Etudier suivant le paramètre m la limite de $f_m$ en $+\infty$

**2)** Etudier suivant le paramètre m la limite de $f_m$ en 1

**EXERCICE 4**

**1)** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{3x^2-5x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-\cos^2(x)}{x^2+x^4}$ ; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{\tan^2(\pi x)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin(2x)-\cos(x)}{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos(x)}$ ; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(2x)}{1-\cos^3(x)}$

**2)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(x)}{2x-\pi}=-\dfrac{1}{2}$

(On pourra utiliser le changement de variable $y=x-\dfrac{\pi}{2}$)

**3)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)}{4x-1}=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$ (On pourra utiliser le changement de variable $y=x-\dfrac{1}{4}$)

**4)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin(x)-1}{2\cos(x)-\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$ (On pourra utiliser le changement de variable $y=x-\dfrac{\pi}{6}$)

**5)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

On pourra utiliser le changement de variable $y=\dfrac{1}{x}$

## ASYMPTOTES ET BRANCHES INFINIES

**EXERCICE 5** Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{2x-4}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$

**1)** Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\neq 2$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2x-4}$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ une asymptote oblique $\Delta$ dont on précisera l'équation réduite

**2)** Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x=2$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$

**3)** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ en admettant que les variations de f sont données par le tableau ci-dessous

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-4$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**EXERCICE 6** On considère la fonction g définie par $f(x)=\sqrt{x^2-4x+13}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$

**1)** Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$

**2)** Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x-2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

**3)** Montrer que la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y=-x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

**4)** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ en admettant que les variations de g sont données par le tableau ci-dessous

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

## EXERCICE 7

Soit la fonction f définie par $f(x)=x+\sqrt{x^2-2x-8}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan

**1)** Déterminer le domaine de définition de f ainsi que son domaine de continuité

**2)** Montrer que la droite d'équation y = 1 est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$

**3)** Montrer que la droite d'équation $y=2x-1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

**4)** Soit la fonction g définie par $g(x)=f(x)-ax$ où a est un paramètre réel**.** On désigne par $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

**a)** Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[4;+\infty)$, $g(x)=x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}+1-a\right)$

**b)** Etudier suivant les valeurs de a, la limite de la fonction g en $+\infty$**.** Pour qu'elle valeur de a la courbe $\mathscr{C}_g$ admet-elle une asymptote horizontale ?

**c)** Montrer que si $a\neq 2$, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique dont on précisera une équation

## EXERCICE 8

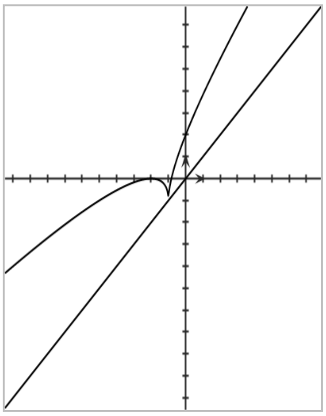
Soient les fonctions définies par **:** $f(x)=\sqrt{|x+2|}$ $g(x)=\frac{x\sqrt{|x+2|}}{4}$ et $h(x)=x+\sqrt{|4x+4|}$**.** On désigne par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ leurs représentations graphiques dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$

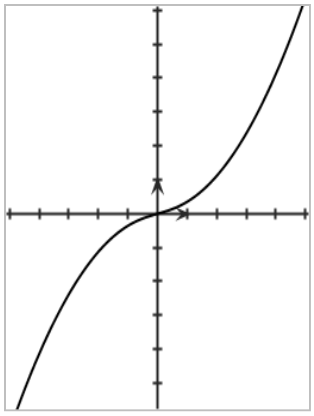
**1)** Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ des branches paraboliques de direction celle de $(O,\vec{i})$

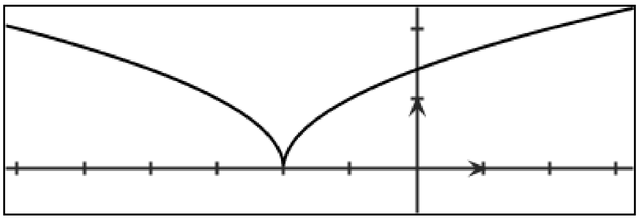
**2)** Montrer que la courbe $\mathscr{C}_g$ admet aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ des branches paraboliques de direction celle de $(O,\vec{j})$

**3)** Montrer que la courbe $\mathscr{C}_h$ admet aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ des branches paraboliques de direction celle de la droite d'équation $y=x$

**4)** Reconnaitre dans les trois figures suivantes les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$







## EXERCICE 9

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par **:** $g(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x+2}+x-2}{x-1}$

**1)** Montrer que g est prolongeable par continuité en 1 et définir son prolongement continue qu'on notera par f

**2)** Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ d'équation $y=f(x)$ possède deux asymptotes horizontales

**3)** Montrer que le point $I(1;1)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$

**4)** En admettant que f est strictement croissante, dresser le tableau de variation de f puis donner une allure de la courbe $\mathscr{C}_f$

### FONCTIONS COMPOSEES

## EXERCICE 10

On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=x-4\sqrt{x}+5$ et $g(x)=\frac{3x+6}{x-2}$

**1)** Déterminer le domaine de définition et continuité de chacune des fonctions f et g

**2)** Déterminer le domaine de définition de la fonction composée gof puis exprimer $(gof)(x)$ en fonction de x

**3)** Déterminer le domaine de continuité de la fonction gof puis étudier les limites aux bornes de son domaine de définition

**4)** Expliciter la fonction $fog$ puis étudier ses limites aux bornes de son domaine de définition

## EXERCICE 11

On considère les fonctions U et V définies par : $U(x)=\dfrac{\sin(2x)}{x}$ et $V(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

**1)** Déterminer le domaine de définition de la fonction composée $UoV$ puis montrer qu'elle est prolongeable par continuité en 1. Définir la fonction f qui prolonge $UoV$ par continuité en 1

**2)** Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$. Montrer que la droite d'équation $y=2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$

**3)** Montrer que pour tout nombre réel non nul x on a : $-\dfrac{1}{|x|} \leq U(x) \leq \dfrac{1}{|x|}$. En déduire la limite de la fonction U en $+\infty$ et $-\infty$

**4)** Déterminer le domaine de définition de la fonction $VoU$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(VoU)(x)=-1$ et interpréter graphiquement

**5)** Montrer que la fonction $VoU$ est prolongeable par continuité en 0. Définir la fonction g qui prolonge $VoU$ par continuité en 0

## EXERCICE 12

On considère deux fonctions f et g continues sur leurs domaines de définitions respectifs $]1\,;+\infty[$ et $]0\,;+\infty[$. On donne ci-dessous leurs tableaux de variations :

| x | 1 | 3 | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | ‖ $+\infty$ ↘ | 0 | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1$ |

| x | 0 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 | ↘ | $-\infty$ |

**1)** Déterminer le domine de définition de chacune des fonctions composées $fog$ et $gof$

**2)** Montrer que $fog$ et $gof$ sont continues sur leurs domaines de définition

**3)** Calculer $\lim\limits_{x\to 3^-}(gof)(x)$ et $\lim\limits_{x\to 4^-}(fog)(x)$

**4)** Montrer que la fonction $fog$ admet un prolongement continue U à droite de 0 et préciser l'image de 0 par U

**5)** Montrer que la fonction $gof$ n'est pas prolongeable par continuité à droite en 1

**6)** Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique $\alpha$ et que $\alpha\in]1;3[$ puis déterminer les images de chacun des intervalles $]1;\alpha[$ et $[\alpha;+\infty[$ par f. En déduire le domaine de définition de $fof$

## IMAGE D'UN INTERVALLE ET VALEURS INTERMEDIAIRES

## EXERCICE 13

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | 4 | ↘ | $-\infty$ |

**1)** Déterminer en justifiant l'image par f de chacun des intervalles suivants : $]-\infty,0]$ , $[0;2]$ , $[2;+\infty[$ $]-\infty,2]$ et $[0;+\infty[$

**2)** Déterminer le nombre et le signe des racines x de l'équation $f(x)=y$ dans chacun des cas suivants :

**a)** y appartient à l'intervalle $]-\infty;1[$

**b)** y appartient à l'intervalle $]1\,;4[$

**3)** On suppose que $f(3)+f(4)=2$ et $f(3)\times f(4)=-1$

**a)** Montrer que l'équation $f(x)=f(3)$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions alors que l'équation $f(x)=f(4)$ possède une seule racine

**b)** Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède dans $\mathbb{R}$ une seule racine $\alpha$ et que $\alpha\in]3\,;4[$

**c)** Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ puis dresser son tableau de variation

## EXERCICE 14

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $f(x)=x^4+x^2-7x+4$ et $g(x)=4x^3+2x-7$

**1)** Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$ et que $\alpha\in\left]1,\dfrac{3}{2}\right[$

**2)** Etudier le signe de la fonction g. En déduire les variations de la fonction f

**3)** Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{2}\alpha\left(\alpha-\dfrac{21}{2}\right)+4$. En déduire que $-\dfrac{25}{8} < f(\alpha) < -\dfrac{1}{2}$

**4)** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1<\alpha<x_2$

**5)** Etudier le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$

**EXERCICE 15** On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-3x} & \text{si } x\le -1 \\ f(x)=2+(x+1)\sin\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right) & \text{si } -1<x<1 \\ f(x)=-x^3+2x+3 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

**1)** Déterminer le domaine de définition de la fonction f

**2)** Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;1[$ on a **:** $1-x<f(x)<3+x$

En déduire la limite de f à droite en $-1$ puis montrer qu'elle est continue en $-1$

**3)** Calculer $f(1)$ ; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. En déduire que f est continue en 1

**4)** Montrer que f est continue sur son domaine de définition

**5)** Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$

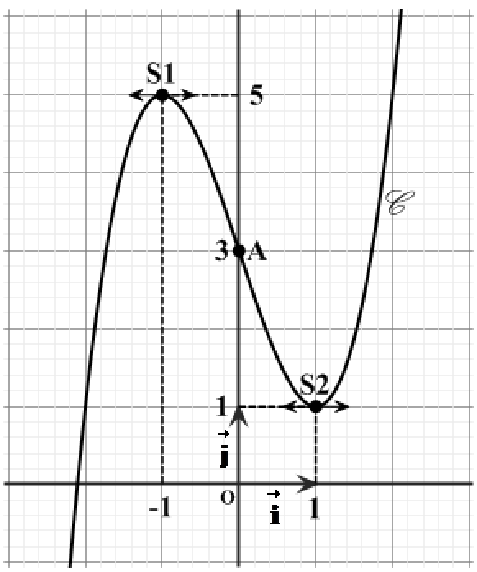
**a)** Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède une branche infinie parabolique et une autre infinie asymptote à une droite oblique

**b)** Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe $(O,\vec{i})$ en seul point A d'abscisse $\alpha$ appartenant à $]1;2[$

**c)** Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $0,1$ puis un encadrement d'amplitude $0,01$

**EXERCICE 16**

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction continue g. La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A, $S_1$ et $S_2$




**1)** Par une lecture graphique, dresser le tableau de variation de g et préciser ses extrémums

**2)** Par une lecture graphique, montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$

**3)** On suppose que g est une fonction polynôme de degré 3 **:** $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

**a)** En considérant le point A, déterminer d

**b)** Exprimer $g'(x)$ en fonction de a, b, c et x puis, en considérants les points $S_1$ et $S_2$, déterminer les coefficients a, b et c

**4)** Dans la suite on suppose que $g(x)=x^3-3x+3$

Montrer que $-3<\alpha<-2$ puis déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $0,1$ puis un encadrement d'amplitude 0.01

**5)** On se propose de déterminer la valeur exacte de $\alpha$, pour cela on applique la procédure suivante :

**a)** Montrer qu'il existe deux réels u et v tels que : $\begin{cases} u+v=-\alpha \\ uv=1 \end{cases}$

**b)** Montrer que $u^3+v^3=3$ puis calculer $u^3$ et $v^3$

**c)** On admet que pour tout réel positif k, l'équation $x^3=k$ admet dans $\mathbb{R}_+$ l'unique solution $x=\sqrt[3]{k}$.

Montrer que : $\alpha=-\left(\sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)$ puis donner à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-9}$ prés

**EXERCICE 17** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{2|x|+3\sin(x)}{x+1}$

**1)** Montrer que pour tout x strictement positif, on a **:**
$2-\dfrac{5}{x+1}\le f(x)\le 2+\dfrac{1}{x+1}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**2)** Montrer que pour tout x strictement inférieur à $-1$ **:**
$-2+\dfrac{5}{x+1}\le f(x)\le -2-\dfrac{1}{x+1}$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

**3)** Etudier la limite de $f(x)$ en $-1$

**4)** Soit la fonction g définie par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

**a)** Déterminer le domaine de définition de g

**b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$. La fonction g est- elle prolongeable par continuité en 1 ? justifier

**c)** Etudier la limite de $g(x)$ en 0. La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 0 ? justifier

**EXERCICE 18**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par **:**
$$f(x)=\frac{\sqrt{4+2x^2}-2}{x} \quad \text{si } x\ne 0 \text{ et } f(0)=0$$

**1)** Montrer que f est continue en 0 puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$

**2)** Montrer que f est impaire

**3)** Montrer que pour tout $x>0$ ; $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{4}{x^2}+2+\dfrac{2}{x}}}$

**4)** Montrer que sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction f est bornée par 0 et $\sqrt{2}$. En déduire que sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bornée par $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

**5)** On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)$ si $x<0$ et $g(x)=x^4-2x^2$ si $x\geq 0$

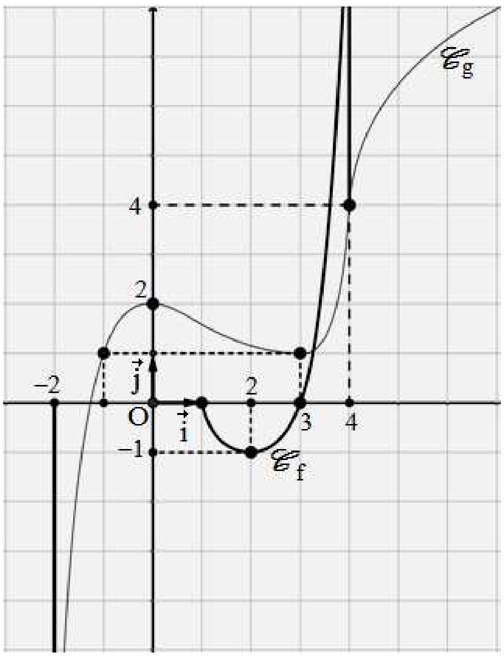
**a)** Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$

**b)** Montrer que l'équation $g(x)=4$ admet une solution unique $\alpha$ et que $\alpha\in]1;2[$

**c)** Montrer que $g(-\alpha)=\dfrac{2-\alpha^2}{\alpha}$

## EXERCICE 19

Dans le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les représentations graphiques dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ des fonctions f et g continues respectivement sur les intervalles $[1;4[$ et $]-2;+\infty[$. Chacune des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ possède une asymptote verticale




**1)** Déterminer par une lecture graphique les variations et les extrémums de chacune des fonctions f et g

**2)** Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $1\leq g(x)<4$ puis déterminer le domaine de définition de la fonction composée fog

**3)** Préciser l'image de l'intervalle $[1;2]$ par gof puis montrer que la fonction gof est continue et strictement décroissante sur l'intervalle fermé $[1;2]$

**4)** Montrer qu'il existe un réel $x_0$ dans $[1;2]$ tel que $(gof)(x_0)=x_0$

**5)** On se propose de déterminer le domaine de définition et les variations de la fonction h définie par $h(x)=\sqrt{4-f(x)}$

**a)** Montrer que l'équation $f(x)=4$ admet une solution unique $\alpha$ et que $\alpha\in]3;4[$. En déduire le domaine de définition de la fonction h

**b)** Etudier les variations de h sur son domaine de définition et préciser ses extrémums

## EXERCICE 20

On considère deux réels a et b tels que a < b et une fonction f continue sur $[a,b]$

**1)** Montrer que si $f(a)\neq f(b)$ alors pour tout couple $(\alpha,\beta)$ de réels strictement positifs, il existe un réel c dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que : $\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)f(c)$

**2)** Montrer que si $f([a,b])\subset]a,b[$, alors il existe un réel $x_0$ dans $]a,b[$ tel que $f(x_0)=x_0$

**3)** Soient $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n$ une suite de n valeurs appartenant à l'intervalle $[a,b]$, montrer qu'il existe un réel $\lambda$ dans $[a,b]$ tel que :

$$f(\lambda)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots\cdots+f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

## EXERCICE 21

On considère l'application G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G(x)=x^3-3x-1$

**1)** Dresser le tableau de variation de G et montrer que l'équation $G(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions $x_1$, $x_2$, $x_3$ appartenant à l'intervalle $]-2;2[$

(On prendra : $x_1<x_2<x_3$)

**2)** Montrer que pour toute solution $x_i$ de l'équation $G(x)=0$, il existe un seul réel $\theta_i$ dans l'intervalle $]0,\pi[$ tel que : $x_i=2\cos\theta_i$

**3)** Montrer que : $4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)=\cos(3\theta)$

**4)** Déterminer les solutions de l'équation $G(x)=0$ puis utiliser la calculatrice pour donner les valeurs approchées des solutions $x_i$ à $10^{-3}$ près