4 Déterminer les limites suivantes :

① $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\sin\left(\dfrac{\pi}{x-1}\right)$. ② $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)-1\right)$.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-\cos(\pi x)}{x+1} & \text{si } x\in]-\infty\,,-1[, \\ f(x)=\sqrt{x^2-x+2}-x-2 & \text{si } x\in[-1\,,+\infty[. \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① Déterminer la nature des branches infinies de C_f.

② Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

③ Soit g la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right]$ par $\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) & \text{si } x\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right[, \\ g(\pi)=-\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right]$.

6 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{x^2+1} & \text{si } x\in]0,+\infty[. \\ f(0)=0 \end{cases}$

① Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

② Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

③ a) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Montrer que g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que la fonction $h : x\mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ est strictement croissante sur $[1,2]$.

c) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet, dans l'intervalle $]1,2[$, une unique solution α.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.