Exercice 1 : les parties sont indépendantes

A / Soit $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

1) Calculer $1 + j + j^2$
2) A , B et C désignent trois points d'affixes respectives a , b et c tels que $a + bj + cj^2 = 0$

Montrer que ABC est équilatéral (direct ou indirect ?)

B/ Déterminer l'ensemble suivant :

E = { M(z) / les points A(1) , M(z) et M'($1+z^2$) sont alignés }

C/

On considère l'application f définie dans P\{A(-1)} par f(M(z)) = M' (Z') signifie $Z' = \frac{z-2i}{z+1}$

Déterminer les ensembles suivants

E_1 = { M (z) / Z' ∈ IR } ;

E_2 = { M' (Z') / z est un imaginaire }

E_3 = { M' (Z') / M décrit le cercle trigonométrique privé de A } .

E/ Z un nombre complexe d'argument $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et de partie imaginaire $\tan(\theta)$

a) Ecrire Z sous forme exponentielle
b) En déduire Z sous forme algébrique

F/ Soit $\theta \in]0 , \pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

Soit $z = 1 + i\tan(\theta)$, Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe

$w = \frac{z}{1-z}$

G/ Soit $z = e^{i(2\pi/7)}$

a) Calculer z^7
b) On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

Montrer que S et T sont conjugués puis en déduire la partie réelle de S

Exercice 2

A/ Soit θ un réel de $]0 , \theta[$ et $u = i + e^{i\theta}$

1) Déterminer le module et un argument de u
2) Soit $z = \frac{1}{2}\left[1 + i\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]$

   Ecrire z sous forme $i + e^{i\theta}$

   En déduire le module et un argument de z
3) Calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

B/ Soit $z = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

1) Ecrire sous forme exponentielle, le complexe

   $z' = (1 + i)z$
2) Donner alors z sous forme exponentielle
3) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 3

Soit f l'application définie d...

f(M(z)) = M'(z') signifie qu...

1) Montrer que pour tout point M distinct de O on a O , M et M' sont alignés .

Soient A(-1) , B(i) et M(z) ∈ (AB)\{B}

a) Montrer que $\frac{1+z}{1+iz} = \frac{1+\bar{z}}{-1+i\bar{z}}$

b) En déduire que si M décrit (AB)\{B} alors M' décrit une ligne fixe que l'on déterminera

2) Soit C le cercle de centre I(2) et de rayon2

Déterminer une équation de l'ensemble f(C)

Exercice 4

On considère le nombre complexe

$a = -4\sqrt{3} - 4i$

1) Ecrire a sous forme exponentielle.
2) Résoudre dans C l'équation

   $z^2 = -4\sqrt{3} - 4i$
3) Soit $u = (-1 - i) + \sqrt{3}(1 - i)$

a) Calculer u^2

b) En déduire le module et un argument de u

c) Soient les points A(u) , B($\sqrt{3}(1-i)$) et C($-1-i$)

Montrer que OBAC est un rectangle

Exercice 5 :

A tout point $M(z) \in P\setminus(O,\vec{u})$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z\bar{z}}{\bar{z}-z}$

1) Montrer que M' appartient à $(O,\vec{v})$.

2) Montrer que : $|z'| = |z' - z|$.interpréter le résultat géométriquement.

3) Soit M un point n'appartenant pas à $(O,\vec{u})$. Donner une construction géométrique de M'

4) Soit M un point n'appartenant pas à $(O,\vec{u}) \cup (O,\vec{v})$.

a) Montrer que $\frac{z'-z}{z'} = \frac{z}{\bar{z}}$

b) En déduire l'ensemble E des points M pour lesquels le triangle OMM' est rectangle en M'.

Exercice 6

Résoudre dans C chacune des équations suivantes :

1) a) $z^2 = 1 - i$ b) $z^2 = i$
2) $z^2 = -8 - 6i$
3) $z^2 + 2iz + 1 + \frac{3}{2}i = 0$
4) $z^5 = 32i$

Exercice 7 : Juin 97

1) Résoudre , dans l'ensemble des nombres complexes C , l'équation

$2z^2 - 2(1+i)z + \frac{1}{2} + i = 0$

2) Soit θ un réel de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et (E) : $2z^2 - (1 + 2\cos\theta + 2i)z + \cos\theta + i = 0$

a) Montrer que l'équation E admet une solution réelle que l'on calculera

b) Calculer l'autre solution en fonction de □

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct , On considère les points A et M d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et $\cos\theta + i$

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque le réel θ varie dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$

b) Calculer AM en fonction de θ et en déduire la valeur de θ pour laquelle la distance AM est minimale

Exercice 8

F l'application du plan complexe dans lui-même par f(M(z)) = M'(Z') avec $Z' = \frac{z + i\bar{z}}{2}$

1) Déterminer l'ensemble D des points invariants par F

2) Soit M n'appartenant pas à D

Montrer que la droite (MM') est parallèle à une droite fixe que l'on caractérisera

3) **Vérifier que FoF(M) =F(M) pour tout point M du plan**

4) **Construire alors M' dans le cas où M n'appartient pas à D.**

5) **Conclure .**

M.BHIRI

Test 1 Complexe

4M 2019 / 2020

1) Soit a un paramètre complexe
Résoudre dans C l'équation (E_a) : $z^2 - a(a^2+ i)z + a^4 i = 0$
Résoudre (E) : $z^3 = i (z - 1)^3$
2) Déterminer L'ensemble des points M(z) vérifiant : $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right) \in IR$
3) Déterminer L'ensemble des points M(z) vérifiant: $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right) \in i\, IR$
4) Déterminer L'ensemble des points M(z) vérifiant : $\arg\left(\frac{1-z}{2iz-2}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$
5) z le nombre complexe de module $\sqrt{3} - 1$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$.
Donner un argument de $S = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$
6) On désigne par j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.
Comparer j^{2020} et $\bar{j}$
7) Soit d un nombre complexe de module 2. Déterminer les ensembles des points M$(-i + d)$ et N$(- i - d)$
8) A(1) , B($e^{i\theta}$) et C($e^{i2\theta}$). Déterminer θ pour que ABC soit équilatéral.
9) Pour tout nombre complexe z, Montrer que si $|2 + iz| = |2i - \bar{z}|$ alors z est réel.
10) Déterminer les nombres complexes z de module 1, vérifiant : $\arg(z^2) \equiv \arg(\bar{z})\ (2\pi)$

Questions indépendantes :

1) On considère les nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2}\,(1 - i)$.
Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que $a^n = b^n$.

2) Vérifier que $a = \sqrt{2} + i$ est une solution de l'équation (E) : $Z^4 + 7 + 4i\sqrt{2} = 0$

Résoudre alors (E)

3) a)Mettre sous forme exponentielle les solutions de $Z^2 - Z + 3 + i\sqrt{3} = 0$
A, B et M les points d'affixes respectives $i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}e^{i\theta}$ où $\theta \in IR$
b)Déterminer θ, pour que OAM soit isocèle en A.
$B' = S_{(O,\vec{u})}(B)$ et N le point du plan tel que OB'NM est un parallélogramme.
c)Déterminer l'ensemble décrit par N

4) Soit f l'application définie dans le plan complexe par f(M(z)) = M'(Z') tel que $Z' = iz + 1 + i$.
a)Montrer que f est une isométrie
b) Montrer que f admet un unique point invariant I dont on déterminera son affixe .
c) Caractériser alors f.

5) Soit f l'application définie dans P\{I(1)} par f(M(z)) = M'(Z') tel que $Z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$.
a)Déterminer l'ensemble Γ des points invariants par f .
b)Montrer que M' appartient à un cercle fixe lorsque M vari dans P \ {I(1)}.
c) En déduire que f(M') = f(M).
d) Soit A et B deux points de P\{I(1)} , distincts et d'affixes respectives a et b .
Montrer que : si f(A) = f(B) alors les points A , B et I sont alignés.
e) Soit M un point n'appartenant pas à Γ . En déduire une construction du point M'.

6) Soit z un nombre complexe non nul .On désigne par M , N et A les points d'affixes respectives z , $\frac{1}{z^2}$ et 1 .
Montrer que :
AMN est un triangle rectangle en A si et seulement si $\frac{z+1}{z^2}$ est un imaginaire pur .

7) A(a) et B(b) deux points distincts appartenant au cercle trigonométrique et C (a + b) .
Montrer que $2(\vec{u},\overrightarrow{OC}) \equiv (\vec{u},\overrightarrow{OA}) + (\vec{u},\overrightarrow{OB})\ [2\pi]$

8) Soit z une solution non nulle de l'équation (E) : $z^{2019} = -\bar{z}$.
a) Montrer que $|z| = 1$.
b) Vérifier alors que z est une racine 2020$^{\text{ième}}$ de (- 1)

9) On se propose de résoudre l'équation (E) : $z^3 - 3iz + 1 - i = 0$
On désigne par :
z une solution de (E).
u et v deux nombres complexes vérifiant $u + v = z$ et $u.v = i$
a) Montrer que u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation (E') : $a^2 + (1 - i)a - i = 0$
b) Déduire les valeurs possible de u puis les valeurs respectives de v .
c) Résoudre alors (E).

10)On considère n un entier naturel ≥2 et $\theta \in IR$
On considère les n nombres complexes z_0, z_1, z_2, z_3, ... et z_{n-1} les racines n$^{\text{ième}}$ de $e^{i\theta}$ où
a) Montrer que la somme $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{n-1} = 0$.
b) Montrer que les points $A_0(z_0 + 1)^n$, $A_1(z_1 + 1)^n$, $A_2(z_2 + 1)^n$, ...et $A_{n-1}(z_{n-1} + 1)^n$ sont alignés.

Serie 1 Limite & Continuité & Dérivabilité

$4^{ème}$

M.BHIRI

Exercice 1

Soit $f(x) = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

1) Montrer que $f(x) \in]-1, 0[$ pour tout réel x .
2) Soit $g(x) = \cot g(\pi f(x))$
   a) Déterminer le domaine de g
   b) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$
   c) Etudier la continuité de g sur IR

Exercice 2

On donne les fonctions suivantes

$f : x \mapsto f(x) = -1 + \sqrt{1+x^2}$

$g : x \mapsto g(x) = \dfrac{x^2}{1+|x|}$

1) Démontrer que f et g sont paires , continues et dérivables.
2) Etudier f(x) et g(x) quand x tend vers $+\infty$
3) Montrer que les courbes respectives de f et de g admettent deux asymptotes obliques dont on donnera leurs équations respectives.
4) Démontrer que, quelque soit x réel ,
   $1+|x| \leq 1+\sqrt{x^2+1}$ et $f(x) \leq g(x)$.
   En déduire la position relative de la courbe de f par rapport à celle de g.

Exercice 3

1) Montrer que l'équation : $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$
2) On considère une fonction continue sur $[0, 1]$ et telle que $f([0, 1]) \subset [0, 3]$

Montrer que l'équation $f(x) = 3x$ admet au moins une solution α dans $[0, 1]$

Exercice 4

On considère les fonctions $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$, $g(x) = \sqrt{x^3-1}$ et $h = g\circ f$

1) Déterminer D_f et D_g puis en déduire D_h
2) Etudier la continuité de f et g
3) h est elle continue sur son domaine ?

Exercice 5

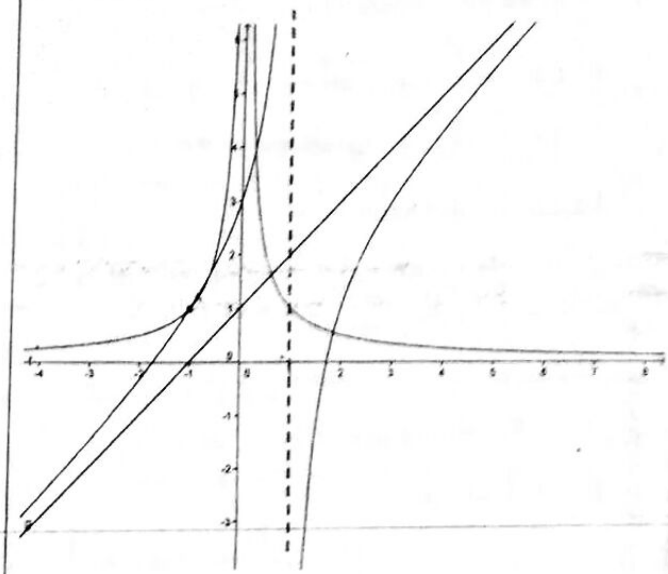
On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto f(x) \begin{cases} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x^2}{1+x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$
2) Etudier la dérivabilité de f en 0
3) Etudier les variations de f sur $[0, 1]$ et construire la représentation de la restriction de f sur $[0, 1]$
4) En déduire $f([0, 1])$.
   En déduire que l'équation : $2 f(x) = 1$ admet (au moins ou une seule) solution dans $[0, 1]$

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé , on donne les courbes représentatives de f et g



1)
a) Déterminer graphiquement les limites
$\lim\limits_{(-1)^+} g\circ f$; $\lim\limits_{(-1)^-} g\circ f$; $\lim\limits_{+\infty} f\circ g$; $\lim\limits_{-\infty} f\circ g$
b) $g\circ f$ est elle prolongeable par continuité en -1 ?
c) La courbe représentative de $f\circ g$ admet-elle une asymptote horizontale ?

2) Déterminer les domaines de chacune des fonctions suivantes : $f\circ g$, $g\circ f$, f/g et g/f

Exercice 7

Soit la fonction définie sur IR par :

$f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) + 1$ si $x < 0$

$f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ si $x \geq 0$.

1) Montrer que f est continue en 0.
2) Etudier le comportement de f en $\pm\infty$.
3) Montrer qu'il existe un réel a de $]-2, -1[$ tel que $f(a) = 0$
4) Déterminer l'image de $[0, +\infty[$ par f.
5) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. Donner un encadrement de la solution d'amplitude 10^{-1}.

M.BHIRI

Exercice 0

Calculer les limites éventuelles suivantes :

1) $\lim\limits_{2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-2x}$,2) $\lim\limits_{+\infty} 2x-\sqrt{x^2-1}$,3) $\lim\limits_{+\infty} x\sin(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1)$ 4) $\lim\limits_{0} \dfrac{\cos 4x-\cos 3x}{\sin 4x+\sin 3x}$ 5) $\lim\limits_{+\infty} (x+1)tg(\frac{1}{x})$

6) $\lim\limits_{-\infty} x+\sqrt{x^2+x+1}$ 7) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$, 8) $\lim\limits_{+\infty} x\sin(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1)$ 9) $\lim\limits_{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin(2x)-1}{2\cos x-1}$, 10) $\lim\limits_{\pi} \dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$

Exercice 1

A) Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}$

Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$

Même question avec : $f(x) = \dfrac{x\cos x}{1+x^2}$

B) Démontrer que la fonction g définie sur IR par $g(x) = \dfrac{1}{2-\sin x}$ est bornée

En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{+\infty} x\,g(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} (x+\sin x)\,g(x)$

Exercice 2 Soit $f(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

1) Montrer que $f(x) \in \,]-1, 0[$ pour tout réel x .
2) Soit $g(x) = \text{cotg}(\pi f(x))$
   a) Déterminer le domaine de g b) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$ c) Etudier la continuité de g sur IR

Exercice3 On considère les fonctions $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$, $g(x) = \sqrt{x^3-1}$ et $h = gof$

1) Déterminer D_f et D_g puis en déduire D_h
2) Etudier la continuité de f et g
3) h est elle continue sur son domaine ?

Exercice 4 On définit la fonction numérique f par : $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

1) Déterminer le domaine de f
2) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1
3) Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point O (0 , 0)

Exercice 5

1) Montrer que l'équation : $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$
2) On considère une fonction continue sur [0 , 1] et telle que $f([0,1]) \subset [0,3]$
   Montrer que l'équation $f(x) = 3x$ admet au moins une solution α dans [0 , 1]

Exercice 6 :Soit f une fonction continue sur IR .

On donne le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f(x)	3	↘	-2	↗	1	↘	$-\infty$

1) Déterminer f (IR) et $f([-1, +\infty[)$
2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
3) Dresser le tableau de signe de f(x)
4) f admet –elle un maximum ? un majorant ? un minimum ?un minorant ?

Exercice 7 On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2x^2}{1+x^2} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$
2) Etudier la dérivabilité de f en 0
3) Etudier les variations de f sur [0 , 1] et ...
4) En déduire f ([0 , 1]) et ... de f sur [0 , 1]
...) solution dans [0 , 1]

Exercice 1

On désigne par f une fonction définie et continue sur $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$ dont la représentation graphique de f est donnée ci-dessous :

Au voisinage de $-\infty$, une branche infinie de direction $(O, \vec{j})$.
Au point A(2 , 1) une tangente horizontale.
Au point O(0, 0) à gauche une demi tangente : $\begin{cases} y = -\frac{1}{6}x \\ x \leq 0 \end{cases}$

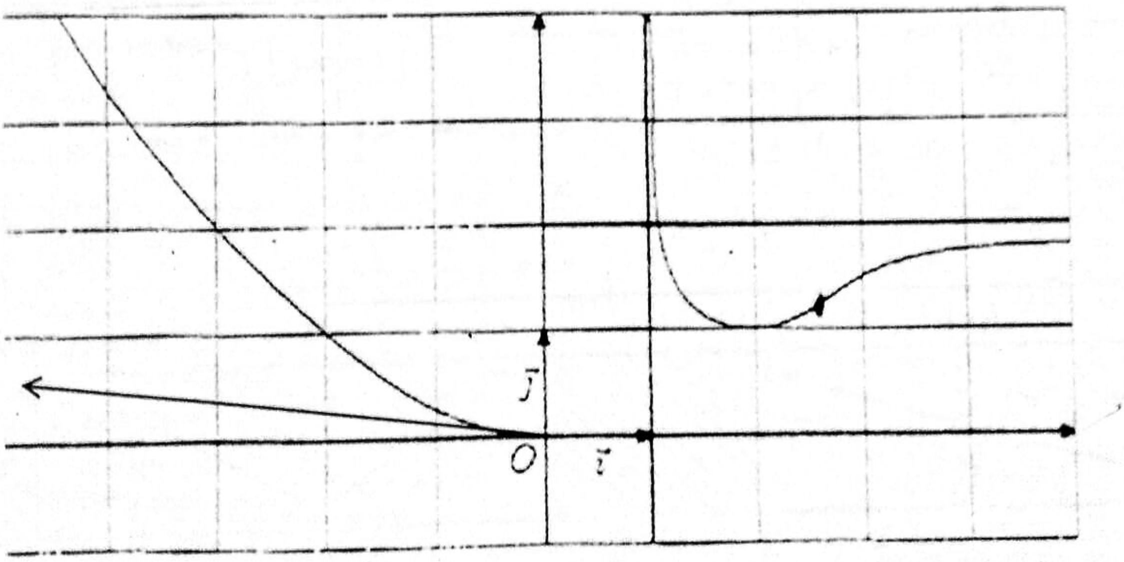
a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(f(x))}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+f(x)}{x-2}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x^2)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{f(x^2)}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(\frac{1}{\sin x})}{x}$;

$\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\frac{\sin(2x)+\tan(x)}{3x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{\sin(f(x))}{x} = -\frac{1}{6}$ et $\lim\limits_{x\to2} \frac{f(x)-1}{\sin(\pi x)}$

b) Montrer que l'équation $f(x) = x + 4$ admet une seule solution sur $]-\infty, 0]$.

c) Soit g une fonction continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$ telle que $g([0, 1]) = [0,1]$
Déterminer le domaine de définition de gof .Calculer $\lim\limits_{x\to(-2)^+} gof(x)$



Exercice 2

On désigne par f et g deux fonctions définie sur IR vérifiant $\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq 1 \\ 0 \leq g(x) \leq 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).g(x) = 1 \end{cases}$

Calculer les limites $\lim f(\ldots$

La figure 1 est la représentation graphique d'une fonction f et la figure 2 est le tableau de variation d'une fonction g .

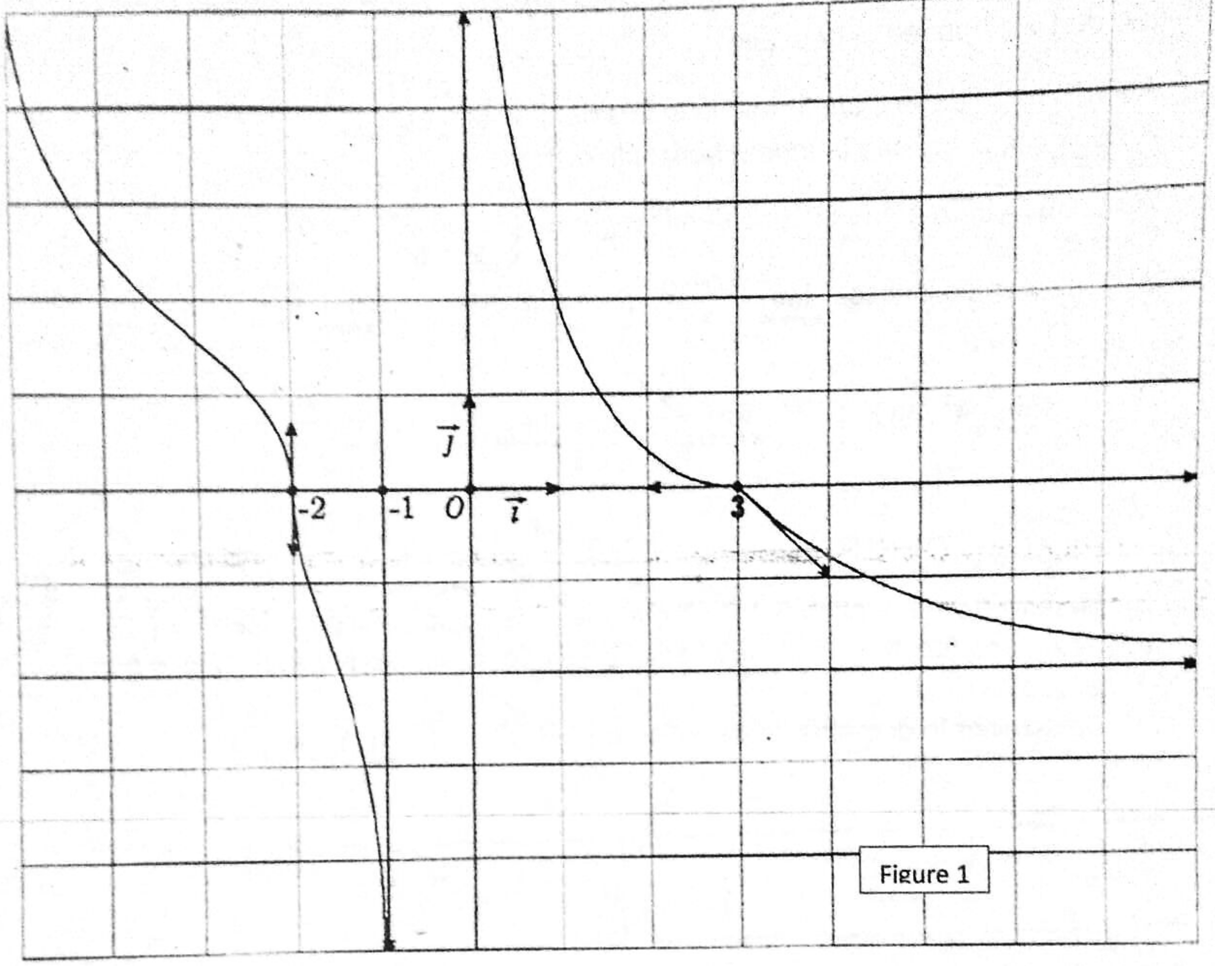


Figure 1

Figure 2

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	//////	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

1) Déterminer le domaine de définition de f o g .
2) Montrer que f o g est continue sur] 1 , +∞ [.
3) Etablir le tableau de variation de f o g .
4) Montrer alors que l'équation x + fog(x) = 0 admet une seule solution $\alpha \in]1,2[$.
5) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x-1\right) \; ; \quad \lim_{x\to-\infty} x f\left(\frac{3x+1}{x}\right) \; ; \quad \lim_{x\to-2^+}\frac{f(x)}{x^2-4} \; ; \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n} g(k) \; ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{g(x+2\cos x)-1}{x} .$$