Exercice 1: TN2001

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé ($o, \vec{u}, \vec{v}$)
on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où a∈IC-{1}
Soit f l'application de P-{B} dans P qui a tout point M(z), associe le point M'(z') tel que z'= $\frac{z-a}{z-1}$

1)Mque les affixes des points invariants par f sont les solutions de (E) :$z^2-2z+a=0$

2)a)On suppose que $a=1+e^{2i\varphi}$ où $\varphi\in]\frac{\Pi}{2},\frac{3\Pi}{2}[$
Résoudre (E)
b)Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de E.

3)Dans cette question on suppose a = -1, soit M(z) un point de P-{B} et M'(z') ; z' = f(z).
a)Mque $(\vec{u},\vec{BM}) + (\vec{u},\vec{BM'}) = 0\ (2\Pi)$
En déduire que la demi-droite [BA) est une bissectrice de l'angle $(\vec{BM},\vec{BM'})$
b)Mque z' est imaginaire pur ssi $|z|=1$
c)En déduire une construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.

Exercice 2(Math2010)

Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On note A le point d'affixe – 2 .
On considère l'équation (E) : $3z^3-2z^2+4z+16=0$.
Soit $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α, $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha\in\mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.
Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha=1+i\sqrt{3}$.
a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α, $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.
Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, M, N et P.
b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.
Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).
b)En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme

Exercice 3(SCx TN2011)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b .

b) Vérifier que $b^2=a$.

2) Soit C le point d'affixe $c=a+b$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Vérifier que $c=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+z-c=0$.

a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).

Montrer que $d=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$

c) Placer alors, le point D d'affixe d.

Exercice 4(Math2011)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose $z=x+iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z}=\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA] , privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O,\vec{u})$.

On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$.

b) Montrer que $OH=OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire .