Mme Triki Ikhlas

Série d'exercices n°

Exercice n°1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1°) Soit x et y deux nombres complexes non nuls ayant le même module. Montrer que le nombre complexe $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ est réel et que le nombre complexe $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$ est imaginaire.

2°) Soit z un nombre complexe non nul, M un point d'affixe z et $A(1)$. Montrer que si $z^3=i(z-1)^3$ alors M appartient à la médiatrice de $[OA]$ et $z(z-1)\in\mathbb{R}^*_-$.

3°) $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ Montrer que que si $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$ alors $M(z)$ appartient à un cercle que l'on précisera.

4°) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que si z un nombre complexe vérifiant $z^n=\frac{1+ia}{1-ia}$ alors $|z|=1$

b) En déduire que si u un nombre complexe vérifiant : $\left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia}$ alors u est réel.

5°) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

a) $A(1)$, $M(z)$ et $M'(1+z^2)$ soient alignés

b) $A(i)$, $M(z)$ et $M'(iz)$ soient les sommets d'un triangle équilatéral

Exercice n°2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par $A(i)$ et par Δ la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$. A tout point $M(z\neq i)$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\frac{iz}{\bar{z}+i}$

1°) a) Montrer que Δ est l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $z'=i$

b) Déterminer l'ensemble E des points M tel que M' soit le milieu de $[AM]$

2°) a) Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$, $z'-i=\left(\frac{1-2\mathrm{Im}(z)}{|z-i|^2}\right)(z-i)$

b) En déduire que pour tout $M\neq A$, les points A, M et M' sont alignés

3°) on pose $z = x+iy$ avec x et y deux réels. soit H le projeté orthogonal de M sur Δ et soit Γ l'ensemble des points M du plan vérifiant $MA = MH$.

a) Montrer que l'eq Γ est : $y = x^2 + \frac{3}{4}$

b) Montrer que pour tout point M privé de A, $AM' \times AM = 2HM$.

c) En déduire que si M varie sur Γ alors M' varie sur un Cercle que l'on precisera

d) donner une construction geometrique du point M' si $M \in \Gamma$.