CHABCHOUB Taïeb
D: 74 292 291 - B: 74 402 788
P: 98 251 593 - 20 251 593

Serie N° 11 4° Math

Ex1) Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, Déterminer le complexe z élément de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tel que $Z = \frac{1+iz}{1-iz}$

2°) Montrer que si $Z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ alors $z = \tan\frac{\theta}{2}$

3°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $t^2 - 2t\cos\alpha + 1 = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ l'équation (E') : $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 + \left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^3 = 2\cos\alpha$

• Ex2) Soit $a \in]0, \frac{1}{2}[$ On désigne par z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 - 2az + \frac{1}{4} = 0$

1°) Sans calculer z_1 et z_2 $\begin{cases} \text{a) Montrer que } \overline{z_1} = z_2 \\ \text{b) Montrer que : } |z_1| = |z_2| = \frac{1}{2} \\ \text{c) Soit } \theta \text{ un argument de } z_1\text{. Montrer que } \cos\theta = 2a \end{cases}$

2°) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
Déterminer a pour que OM_1M_2 soit triangle équilatéral.

• Ex3) Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) Soit l'équation (E) dans $\mathbb{C}$: $Z^2 - 2Ze^{i\theta}\cos\theta + e^{i2\theta} = 0$
vérifier que 1 est une solution. En déduire l'autre solution.

2°) Soit A d'affixe 1 et B d'affixe $e^{i2\theta}$

a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie

b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un losange

c) Déterminer θ pour que la mesure de l'aire du losange $OACB$ soit égale à $\frac{1}{2}$

• Ex4) 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 + (a+1)(1-i)Z - i(1+a^2) = 0$ avec $a \in \mathbb{C}$

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, M, M' et M'' d'affixes respectives $-2i$, $-1+i$, a, $i-a$ et $ia-1$

a) Déterminer a tel que $\begin{cases} AM'' = \sqrt{2}\, AM' \\ (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}) \equiv \frac{\pi}{4} \, [2\pi] \end{cases}$

b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ M'' est l'image de M' par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

3°) a) On suppose que $|a| = \sqrt{2}$. Montrer alors que le point M' appartient à un cercle fixe

b) On suppose que $\arg a \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Montrer alors que le point M'' appartient à une droite fixe

4°) On suppose dans cette question que $|a| = 1$; $a \neq i$ et $a \neq -i$

a) vérifier géométriquement que le triangle IJM est rectangle en M avec I point d'affixe i et J point d'affixe $-i$

b) En déduire que le nombre complexe $w = \frac{ia-1}{i-a}$ est réel.

• Ex5) Soit $f(z) = z^2 - (2\sin\alpha + i)z + 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$
$g(z) = z^2 - (2\sin\alpha - i)z + 1 - \cos\alpha - i\sin\alpha$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$

1°) a) Résoudre l'équation $f(z) = 0$

b) Montrer que les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont les conjuguées des solutions de l'équation $g(z) = 0$. Résoudre alors l'équation $g(z) = 0$

2°) Soit l'équation (E) dans $\mathbb{C}$:
$$z^3 - 2(\sin\alpha + i)z^2 + (-\cos\alpha + 3i\sin\alpha)z + \sin\alpha + i(\cos\alpha - 1) = 0$$

a) Montrer que l'équation (E) admet une seule solution imaginaire que l'on déterminera

b) Résoudre alors l'équation (E). Donner les solutions sous forme exponentielle