LYCEE MED ALI	SERIE (E2) 3	4^{eme} MATH
ANNEE SCOL 2011 / 2012		FARHAT MOHAMED

Exercice 1

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout réel $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_\theta) : z^3 - (3 + 2i\sin 2\theta)z^2 + (2 + 4i\sin 2\theta)z - 2i\sin 2\theta = 0.$$

1) a- Vérifier que 1 est une solution de (E_θ).

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) On considère les points A, M et N d'affixes respectives $z_0 = 1$, $z_1 = 1 + e^{i2\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{-i2\theta}$.

Déterminer l'ensemble décrit par les points M lorsque θ décrit $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

4)

a- Montrer que le triangle AMN est isocèle en A.

b- Déterminer θ pour que le triangle AMN soit équilatéral.

Exercice 2

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$$(E) : z^3 - (2+5i)z^2 + (8i-5)z + 3(2-i) = 0$$

1. a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique : **1.5 cm**), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, 1 et $3i$.

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe : $z' = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6}$.

Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par f.

Placer les points A, B, C, A', B' et C'.

3. On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels).

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

4. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

Tracer (D). Quelle remarque peut – on faire ?

5. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f. Montrer que M' appartient à la droite (D).

6. a) Montrer que, pour tout nombre complexe z :

$\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\bar{z}}{6} + i\frac{z-\bar{z}}{3}$. En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel.

b) En déduire, lorsque $M' \neq M$, la position relative des droites (OA) et (MM').

7. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)). Effectuer la construction sur la figure.

8. Soit M un point d'affixe $z = 1 + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi[$.

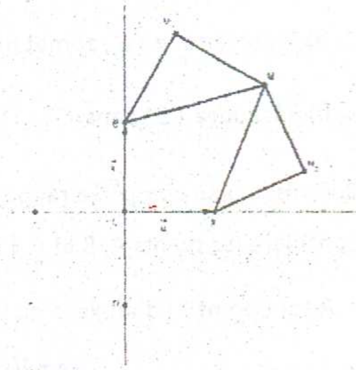
a) Donner la forme exponentielle de z.

b) Déterminer par son équation cartésienne l'ensemble des points M, lorsque θ décrit $[0, \pi[$.

c) Déterminer z pour que M soit invariant par f.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1, i, -1, -i. AM_1M et BMM_2 sont deux triangles rectangles, isocèles et directs respectivement en M_1 et M_2.
Le but de l'exercice est de déterminer la position du point M pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle, isocèle en O et direct.



1. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = iz + z_1(1 - i)$.
   a) Montrer que f est la rotation de centre M_1 qui envoie B en M.
   b) En déduire que $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$.
   c) En considérant la rotation de centre M_2 et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, montrer que $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$.
2. a) Montrer que $OM_1 = OM_2$ si et seulement si $|z+1| = |z+i|$.
   b) En déduire l'ensemble Δ des points M tels que $OM_1 = OM_2$. Tracer Δ sur la figure.
3. a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}}\right) - \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
   b) En déduire la position du point M pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle, isocèle en O et direct. Placer le point M sur la figure.

Exercice 4

Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N.D $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points $A(e^{i\theta})$ et $B(e^{-i\theta})$ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Soit f l'application du plan dans le plan qui à tout point $M(z)$ on associe $M'(z')$ tel que

$z' = \frac{z^2 - 1}{2z - 2\cos\theta}$ où $z \neq \cos\theta$.

1. Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation $(E) : z^2 - (2\cos\theta)z + 1 = 0$, puis résoudre (E)

2. a) Montrer que pour tout $z \neq \cos\theta$ et $z \neq e^{-i\theta}$ on a : $\frac{z' - e^{i\theta}}{z' - e^{-i\theta}} = \left(\frac{z - e^{i\theta}}{z - e^{-i\theta}}\right)^2$

   b) En déduire que si $M \neq A$ et $M \neq B$ on a $\frac{M'A}{M'B} = \left(\frac{MA}{MB}\right)^2$ et $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)[2\pi]$

3. a) Montrer que si M appartient au cercle (ζ) de diamètre $[AB]$ alors $M' \in [AB]$.

   b) (ζ) coupe $(O, \vec{u})$ en E et F. Montrer que E et F ont la même image par f qu'on précisera.

Exercice 5

Soit s la suite définie sur IN* par $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1)a)Montrer que pour tout n ≥ 1 ; $s_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}}$

b)La suite s est-elle convergente ?

2) Vérifier que pour tout entier n ≥1, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

3) On considère les suites u et v définies sur IN* par $u_n = 2\sqrt{n} - s_n$ et $v_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

a)Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_n}{2\sqrt{n}}$

4) On pose $\alpha = \lim_{n \to +\infty} u_n$

Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de l à 0, 1 près

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1°)a) Montrer que pour tout x > 0, $|f(x)| \leq x^3$

b) En déduire la limite de f à droite en 0

c) f est elle prolongeable par continuité en 0 ?

2°)a) Montrer que f est continue sur]0 , +∞[.

b) Montrer que l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^3}$ admet au moins une solution dans [1 , 2]

3°) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi$, interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 7

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{U_n} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que $U_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2/ Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - 1$ et que $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

4/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 - \frac{1}{U_n} \leq \frac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{U_n}$