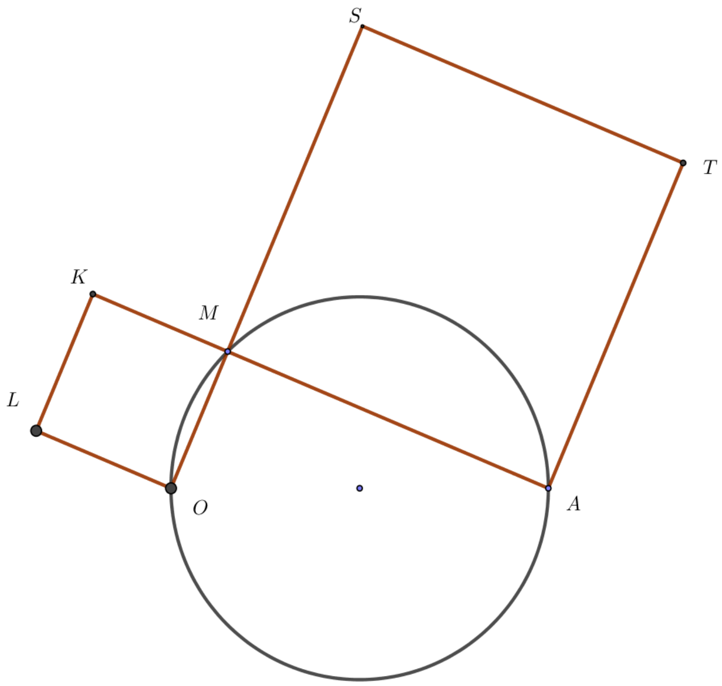
Mr : Chahed — **Série de révision complexe 2** — 4eme Math

Exercice 1

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, I est le milieu de $[OA]$, C est le cercle de diamètre $[OA]$, un point M variable sur le cercle C , et distinct de O et A, ainsi que les carrés de sens direct $ATSM$ et $MKLO$.
On munit le plan d'un repère orthonormé direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.
On note m, t, s, k et l les affixes respectives des points M, T, S, K et L.



1) Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle C , on a : $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

2) Etablir les relations suivantes :
$l = im$ et $t=-im+1+i$.
Montrer ensuite que :
$s=(1-i)m+i$ et $k=(1+i)m$.

3) $a/$ Démontrer que le milieu Ω du segment $[TL]$ est un point indépendant de la position de M sur le cercle C .
$b/$ Démontrer que ⍰ appartient au cercle C .

4) $a/$ Calculer la distance KS et démontrer que cette distance est constante.
$b/$ Montrer que le triangle ΩKS est rectangle et isocèle en Ω.

5) Démontrer que le point S appartient à un cercle fixe dont on déterminera le centre et le rayon

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$

On considère l'équation (E_m): $z^2-m(1+i)z+im^2+m(1-i)-1=0$, $m\in$ C*

1) Résoudre dans C l'équation (E_m)

2) Soit f d'application qui n'a tout point $M(m\neq 1)$ associe le point $M'(m')$ tel que $m'=\frac{im+1}{m-1}$

a) Montrer que si M est distinct de A et B alors $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)[2\pi]$ et $OM'=\frac{MB}{MA}$

b) En déduire que si $M\in C_{(0,1)}$ alors M' varie sur une droite Δ que l'on précisera

c) Montrer que si $\arg(m)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ alors M'appartient au cercle trigonométrique

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$

On désigne par Γ_1 le cercle de de centre I et de rayon 1 et Γ_2 de diamètre $[OI]$

On considère l'équation (E_θ): $z^2-\left(1+e^{i\theta}\right)z+\left(e^{i2\theta}+e^{i\theta}\right)\left(1-e^{i2\theta}\right)=0$,$\theta\in]0,\pi[$

1) Vérifier que $e^{i2\theta}+e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ) et en déduire l'autre solution

2) On désigne par M, M' et M'' les points d'affixes respectives

$$z = e^{i\theta}, z' = 1 - e^{i2\theta} \text{ et } z'' = e^{i2\theta} + e^{i\theta} \text{ et A le milieu de } [M'M'']$$

a) Déterminer les écritures exponentielles de z' et z''

b) Montrer que $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$

3)a) Montrer que $M' \in \Gamma_1$ et que $A \in \Gamma_2$

b) Montrer que $[OA)$ est la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$

c) Construire alors les points M' et M'' pour un point M donné

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$

On considère l'équation (E_m): $z^2 - \left(m - \bar{m}\right)z - |m-1|^2 = 0$, $m \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$

Et on désigne par Γ le cercle trigonométrique

1) Développer $\left(m + \bar{m} - 2\right)^2$ et résoudre (E_m)

2) Soit f d'application qui n'a tout point $M(m \neq 1)$ associe le point $M'(m')$ tel que $m' = \frac{im+1}{1-\bar{m}}$

a) Montrer que pour tout $m \neq 1$ on a $M' \in \Gamma$

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que $f(M) = I$

c) Déterminer l'ensemble des points invariants par f

3) Soient A et B deux points du plan distinct de I d'affixe respectives a et b

Montrer que $f(A) = f(B)$ si et seulement si I , A et B sont alignés

4) Soit N un point de Γ distinct de I

a) Déterminer l'ensemble des point M du plan tel que $f(M) = N$

b) Soit M un point du plan distinct de I construire le point $M' = f(M)$

5) Soit ψ l'ensemble des images des solutions de l'équation $z^3 = i(z-2)^3$

Montrer que $f(\psi) = \{I\}$

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$

On désigne par Γ_0 le cercle trigonométrique, Γ_1 le cercle de diamètre $[OI]$

Γ_2 est le cercle de diamètre $[OJ]$ ou J' est le point d'affixe $(-i)$

1a) Soit φ une isométrie qui laisse globalement invariant $\Gamma_0 U \Gamma_1 U \Gamma_2$.Montrer que $\varphi(O) = O$

b) Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant $\Gamma_0 U \Gamma_1 U \Gamma_2$

2) On considère l'équation $(E_\theta): 4z^2 - 4ie^{-i\theta}z + 1 - e^{-2i\theta} = 0$,$\theta \in]-\pi, \pi[$

a) Résoudre dans C l'équation (E_θ)

b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes $z_1 = \frac{i}{2}(e^{-i\theta} + 1)$ et $z_2 = \frac{i}{2}(e^{-i\theta} - 1)$

Montrer que $M_1 \in \Gamma_1$, $M_2 \in \Gamma_2$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{JO}$

3) Soit f d'application qui n'a tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{1}{2}i\bar{z} + \frac{1}{2}i$

a) Soit M le point de Γ_0 tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi]$.Montrer que $f(M) = M_1$

b) On désigne par $[ON)$ la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Montrer que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

c) Construire M_1 puis M_2 a partir d'un point M de Γ_0

4) On considère l'équation $(E'): (2z - i)^3 = 1$

a) Déterminer les racines cubiques de $(-i)$

b) Montrer que z_0 est une solution de (E') si et seulement si $m = 2i\overline{z_0} - 1$ est une racine cubique de $(-i)$

c) Construire les images des solutions de (E')

Exercice 6

Soit un plan P rapporté à un repère orthonormé direct$(o, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe 1 et B celui d'affixe −1

A tout point M d'affixe z différent de 1. on associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

1. Soit z un complexe différent de -1.

a. Montrer que $(z' - 1)(z + 1) = -2$

b. En déduire que $AM'.BM = 2$

c Soit (C) le cercle de centre B et de rayon 2. Montrer que si M appartient à (C), son image M'appartient à un cercle (C') de centre A dont on donnera le rayon.

2. Soit P le point d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$ et Q le point d'affixe $q = -\bar{p}$

a. Montrer que P appartient a (C)

b. montrer que les points A ; P' et Q sont alignés

c. Construire alors les points A , B , P ;,Q et P'

3. . on pose $z = e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$

a. Montrer que $z' = \mathrm{itan}(\theta)$

b. Ou varie le point M'lorsque M varie sur le cercle $\mathcal{C}_{(0,1)}$ privé de B

4. a. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $M' \in (0, \vec{v})$

b. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $M' \in \mathcal{C}_{(0,1)}$

c. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $M' \in \Delta: \mathrm{y} = \mathrm{x}$

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 2$

Et l'équation $E_\theta: iz^2 - 2(\mathrm{i} - cos\theta)z - 2cos(\theta) = 0$, $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

1)a) Résoudre dans C l'équation E_θ

b) Déterminé la valeur de θ pour la quelle $z_1 = z_2$

2) Déterminé l'ensemble $\Gamma = \{M(z) \in p \ tel \ que \ \frac{z-2}{z} \in i\mathbb{R} \}$

3) On considère les ponts M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + ie^{-i\theta}$

a) Déterminé l'écriture exponentielle de z_1 et z_2

b) Montrer que les points M_1 et M_2 varient sur un même cercle que l'on précisera

4) Dans la suite on suppose que $M_1 \neq M_2$ et soit G le centre de gravité du triangle AM_1M_2

a) Montrer que $z_G = 1 + \frac{2}{3}i\cos(\theta)$ puis déduire l'ensemble des points G lorsque θ varie

b) Déterminé les valeurs de θ pour les quelles le triangle AM_1M_2 est rectangle et isocèle en A

c) Déterminé les valeurs de θ pour les quelles le triangle AM_1M_2 est équilatéral

5) Soit M_3 le point d'affixe $z_3 = \frac{1}{z_1}$ et f la fonction définie $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{\cos(x)}{2(1-\sin(x))}$

a) Montrer que $z_3 = \frac{1}{2} - if(\theta)$

b) le tableau suivant est le tableau de variation de f. Déterminer alors l'ensemble des points M_3 lorsque θ varie

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0

Exercice 8

1)a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (2a + i)z + a^2 + ia = 0$; a est un nombre complexe

b) Déduire l'ensemble des solutions de (E') ; $z^2 - (2\bar{a} - i)z + \bar{a}^2 - i\bar{a} = 0$

2) On suppose que $a = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

a) Vérifier que $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i)$ et que $a + i = \frac{3+\sqrt{3}}{2}(1 + i)$

b) En déduire l'écriture exponentielle de a et $a + i$

3) Sur la figure ci-dessous on tracer le cercle de centre O et de rayon $1 + \sqrt{3}$

a) Construire les points A et B d'affixe respectives a et $a + i$

b) Déterminer l'écriture cartésienne et algébrique de $\frac{a}{a+i}$ puis déduire $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4) On pose $S = a^5 - ia^4 - a^3 + ia^2 + a - i$ et C le point d'affixe S

a) Vérifier que : $(a + i)S = a^6 + 1$

b) En déduire que le triangle OBC est rectangle en O