Exercice n°1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta): z^2 - 2(i+\cos\theta)z + 1 + 2ie^{-i\theta} = 0$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

1- Vérifier que $z_1 = e^{-i\theta}$ est une solution de (E_θ) et en déduire la deuxième solution z_2 de (E_θ).

2- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $Z_A = i$, $Z_B = e^{-i\theta}$ et $Z_C = 2i + e^{i\theta}$.

a- Vérifier que : $\overline{Z_C - Z_A} = Z_B - Z_A$.

b- Ecrire $Z_C - Z_A$ sous forme exponentielle.

c- En déduire la valeur de θ pour que le triangle ABC soit équilatéral.

Exercice n°2:

1-a- Soit $\alpha \in]0, \pi[$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$.

b- Donner les solutions sous forme exponentielle.

2- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') : $Z^6 - 2Z^3\cos\alpha + 1 = 0$.

3-a- Soit θ un réel différent de $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, montrer que : $\frac{z-1}{z+1} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = i\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

b- Utiliser ce qui précède pour donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E'') : $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 2\cos\alpha$

Exercice n°3:

On considère l'équation (E_θ): $16(\tan^2\theta)z^2 - 4(1 + 2i\tan\theta)Z - (\tan\theta - i)^2 = 0$ où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_{\frac{\pi}{4}}$.

2-a- Montrer que l'équation (E_θ) admet dans $\mathbb{C}$ une seule solution réelle que l'on déterminera.

b- Déterminer l'autre racine z_1 en fonction de θ.

c- Mettre $w = (\tan\theta - i)$ sous forme exponentielle. En déduire z_1 sous forme exponentielle.

3- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $M\left(\frac{1}{4\sin^2\theta}e^{2i\theta}\right)$ et N($2i\cos\theta$). Soit M' le symétrique de M par rapport à la droite $(O, \vec{v})$.

a- Déterminer θ pour que les points O, M et N soient alignés.

b- Déterminer θ pour que le quadrilatère OMNM' soit un losange.

Exercice n°4 : (pour tout l'exercice on désigne par α un réel de l'intervalle $]0, \pi[$)

I-1- Vérifier que $e^{2i\alpha} - 2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 1$.

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 0$.

3- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^4 - 2e^{i\alpha}z^2 + 2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 0$.(on donnera les solutions sous f.exp)

II- Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $e^{i\alpha}$, $e^{i\alpha} - 1$ et $e^{i\alpha} + 1$.

1-a- Montrer que le point A est le milieu du segment [BC] et que $\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$.

b- Placer ~~le~~ un point A dans le cas où $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$ et construire alors les points B et C. ?

2-a- Montrer que les points O, B et C ne sont pas alignés.

b- Montrer que BC = 2OA et en déduire la nature du triangle OBC.

c- Déterminer α pour que OBC soit isocèle.

3-a- Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \pi[$ on a : $OA + OB + OC = 1 + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

b- Déterminer la valeur de α pour la quelle la distance OA + OB + OC est maximale.

Exercice n°1 :

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1-i)\, e^{i\alpha} z - i\, e^{i2\alpha} = 0$ où $\alpha \in [0, \pi]$

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2- Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un r.o.n.d du plan, soit A, M' et M'' les points d'affixes respectives : $1 - i$, $e^{i\alpha}$, $-ie^{i\alpha}$.

a- Déterminer α pour que A, M' et M'' soient alignés.

b- Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{M'M''}}\right) \equiv \alpha - \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

c- En déduire la valeur de α pour laquelle la droite (M'M'') est parallèle à l'axe des ordonnées.

3-a- Soit $\theta \in IR \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in Z\}$. Montrer que : $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta}$ (et $z \neq -i$) $\Leftrightarrow z = \tan\frac{\theta}{2}$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice n°2:

On donne dans C l'équation $(E): z^2 - 2(cos2\theta + i.sin2\theta)z - 1 = 0$; θ étant un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

On pose $u_1 = (z_1 + 1)(cos\theta - isin\theta)$ et $u_2 = (z_2 + 1)(cos\theta - isin\theta)$.

1- Calculer $u_1 + u_2$ et $u_1.u_2$, en déduire que u_1 et u_2 sont les racines de l'équation :

$(E'): u^2 - 4.cos\theta.u + 2 = 0$; (u étant l'inconnue).

2- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles u_1 et u_2 sont réels.

3-a- Quand u_1 et u_2 sont réels, montrer que les nombres complexes $(z_1 + 1)$ et $(z_2 + 1)$ ont même argument Que l'on déterminera.

b- Indiquer alors une propriété géométrique, des points A,M$_1$ et M$_2$ d'affixes respectives -1, z_1 et z_2.

4- Quand u_1 et u_2 ne sont pas réels, montrer que les nombres complexes $(z_1 + 1)$ et $(z_2 + 1)$ ont même argument qu'on déterminera. Indiquer alors une propriété géométrique, des points A,M$_1$ et M$_2$.

Exercice n°3 :

Soit θ un réel de $]0 ; \pi[$. On considère l'équation, dans $\mathbb{C}$: $E_\theta : z^2 + i(\sin\theta)z - \frac{1}{2}(1 + e^{i2\theta}) = 0$

1- Vérifier que : $\left(\frac{e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = 2(1 + e^{i2\theta})$ et résoudre l'équation E_θ.

2- P est le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points :

A(1), B($\cos\theta$), C($i\sin\theta$) et M($-e^{i\theta}$)

a- Donner le module et un argument du nombre complexe $e^{i\theta}(1 + e^{i\theta})$

b- Déterminer θ pour que $\overrightarrow{BC}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AM}$.

c- Déterminer θ pour que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires.

Exercice n°4 :

1- Déterminer le module et un argument a , ($a \in [0 ; 2\pi[$)de chacune des racines cubiques du nombre complexe $u = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

2- Soit θ un réel appartenant à $]0 ; 2\pi[$, écrire le nombre complexe $\frac{1}{1 - \cos\theta - i\sin\theta}$ sous la forme algébrique

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2z - 1)^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)z^3$.

Exercice n°1:

On considère les nombres complexes $Z = 1 + i\sqrt{3}$ et $Z' = (x-2)(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ avec x un réel donné

1- Déterminer la forme trigonométrique de Z, $-Z$, Z^2, $\frac{2}{Z}$ et Z'

2- Montrer que Z^{2004} et Z'^{1992} sont des réels .

Exercice n°2:

Soit θ un réel $\neq (2k+1)\pi$, k∈□

Déterminer le module et un argument du complexe Z tel que $Z=\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{\sin\theta+(1+\cos\theta)i}$

Exercice n°3:

Soient θ et φ deux réels tels que $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$.

On considère les nombres complexes $z_1 = [1\ ,\ 2\theta]$ et $z_2 = [1\ ,\ 2\varphi]$

1- Mettre sous forme trigonométriques les complexes $1 - z_1$ et $1 + z_2$

2- En déduire le module et un argument de $Z = \dfrac{1-z_1}{1+z_2}$

Exercice n°4:

Soit la fonction f : □ → □ ; $z \mapsto f(z)=\dfrac{z-1}{|z|^2+\bar{z}}$

1- Déterminer le domaine de définition de f .

2- On pose $z = e^{i\theta}$ avec $\theta\in]-\pi\ ;\ 0[$

a- Montrer que $f(z) = tg(\frac{\theta}{2})e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

b- En déduire le module et un argument de f(z)

$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Exercice n°5:

1- Soit $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ($\alpha\in IR$)

a- Ecrire sous la forme trigonométrique : $\frac{1}{z}$, z^n et $\frac{1}{z^n}$; $n\in IN\backslash\{0,1\}$

b- En déduire $z-\frac{1}{z}$ et $z^n - \frac{1}{z^n}$ en fonction de sinα et sin(nα)

c- Calculer de deux manières $\left(z-\frac{1}{z}\right)^5$ en fonction de α

d- Résoudre dans IR l'équation $16\sin^5 x = 10\sin x - 6\sin 3x$

2- Soit $z = [1\ ;\ \frac{2\pi}{5}]$

a- Calculer z^5 et en déduire que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

b- En déduire les valeurs de : $x = \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$

et $y = \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5}$

Exercice n°1:

Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On considère le point M d'affixe $z = i - i e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0, \pi[$.

1- Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ décrit $]0, \pi[$.

2- Soient N et P les points d'affixes respectives $z_1 = \overline{z}$ et $z_2 = \frac{z^2}{\overline{z}}$.

a- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b- Vérifier que M et N sont distincts.

c- Montrer que $MN = MP$

3-a- Exprimer $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}})$ en fonction de θ.

b- Déterminer alors θ pour que le triangle MNP soit équilatéral.

Exercice n°2:

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o\,; \vec{u}; \vec{v})$,on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et -1 . Soit l'application $f : P \setminus \{A\} \to P$. $M(Z) \to M'(Z')$ tel que $Z' = \frac{\overline{Z}(Z-1)}{\overline{Z}-1}$

1- Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

2- Montrer que pour tout pont M de $P \setminus \{A\}$; $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux et que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires .

3- En déduire une constriction géométrique des ponts M' à partir de M

a- Quelle est l'image par f du cercle ξ de centre O et de rayon 1 privé de A .

b- Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r ou $r \in R^* \setminus \{1\}$

Montrer que l'image par f de tout point de Γ et un point de Γ .

Exercice n°3:

1- Résoudre dans C l'équation $|Z-1|^2 + \overline{Z} - 1 = 0$. On désigne par E l'ensemble des solutions de cette équation.

2- Pour $Z \in C \setminus E$ on pose $f(Z) = \frac{iZ^2}{|Z-1|^2 + \overline{Z} - 1}$. Soit $(o\,; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormé du plan complexe ;

On désigne par M(Z) et M' (f(Z))

a- Montrer que $f(Z) = \frac{iZ}{\overline{Z}-1}$

b- Déterminer l'ensemble des points M(Z) tels que $M'(f(Z)) \in (O\,; \vec{u})$

3-On note A(1) et B (-i)

a- Montrer que $M \in med\,[OA] \Leftrightarrow M' = B$

b- Montrer que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM})\ [2\pi]$ En déduire l'ensemble Δ des points M tel que O , M et M' soient alignés .