❄ Lycée Pilote Bourguiba Tunis ❄ ❄ 2021-2022 ❄

4$^{\text{éme}}$ Maths et Sc ❄ Série N°01

Nombres complexes

Prof : ✍ Masmoudi Radhouane ✍

Exercice 1

Pour tout complexe z on pose $f(z) = z^2 - 5iz - 4$.

1. Calculer $f(i)$; $f(1+i)$; $f(3+\frac{5}{2}i)$ et $f(4i)$.
2. Montrer que si z est imaginaire alors $f(z)$ est réel.
3. Soit α un nombre complexe ; déterminer en fonction de α, les solutions de léquation : $f(z) = f(\alpha)$.
4. En déduire lensemble E des complexes z tels que $f(z)$ soit réel.

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que : $z - i\bar{z} = 0$.
2. Soit f l'application du plan privé de E dans le plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{z+\bar{z}-i}{z-i\bar{z}}$.
   a. Calculer les coordonnées de M en fonction de celles de M.
   b. Donner une équation cartésienne de lensemble H des points $M(z)$ tels que z soit imaginaire.
   c. Donner une équation cartésienne de lensemble K des points $M(z)$ tels que $|z| = 2$.

Exercice 3

Déterminer lensemble des points $M(z)$ dans chacun des cas suivants :

1. $z^2 - (1-2i)^2 = \bar{z}^2 - (1+2i)^2$.
2. $(z-1-i)(\overline{z}-1+i) = 5$.
3. $z + \bar{z} = |z|^2$.
4. $(z-i)(\overline{z}+i) = 2$.
5. $\dfrac{z-3}{z+3}$ soit réel ; puis imaginaire.
6. $|z-3i| = |2i+z|$.
7. $Re[\dfrac{z+1}{z+i}] = 1$.
8. $|\dfrac{z-1}{z+i}| = 2$.

Exercice 4

1. Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1. Montrer que si $z_1 z_2 \neq -1$ alors $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ est réel, puis montrer que si $\bar{z}_1 z_2 \neq -1$ alors $\dfrac{z_1+z_2}{1+\bar{z}_1 z_2}$ a pour module 1.
2. Soient u, v et w trois complexes de module 1 tels que $u+v+w \neq 0$. Montrer que $\dfrac{uv+uw+vw}{u+v+w}$ est de module 1.
3. Soient x, y et z trois complexes de module 1 tels que $x+y+z=1$ et $xyz=1$.
   Montrer que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=xy+xz+yz=1$.
4. Soit u un complexe de module 1 et distinct de 1. Montrer que pour tout complexe z on a : $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ est réel.

Exercice 5

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$, où x, x', y, y' sont des. nombres réels.
On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\overline{z})=0$.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(z'\overline{z})=0$.
3. N est le point d'affixe z^2-1. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?
4. On suppose z non nul. P est le point d' affixe $\dfrac{1}{z^2}-1$.
   On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.
   a. Montrer que $\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\overline{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2$.
   b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un R.O.N . On considère le point $A(2)$.

1. Déterminer lensemble Δ des points $M(z)$ tels que : $4-z-\bar{z}=0$.
2. Soit f lapplication de $P-\Delta$ dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z'=\dfrac{4-z\bar{z}}{4-z-\bar{z}}$.

a) Montrer que z' est réel.

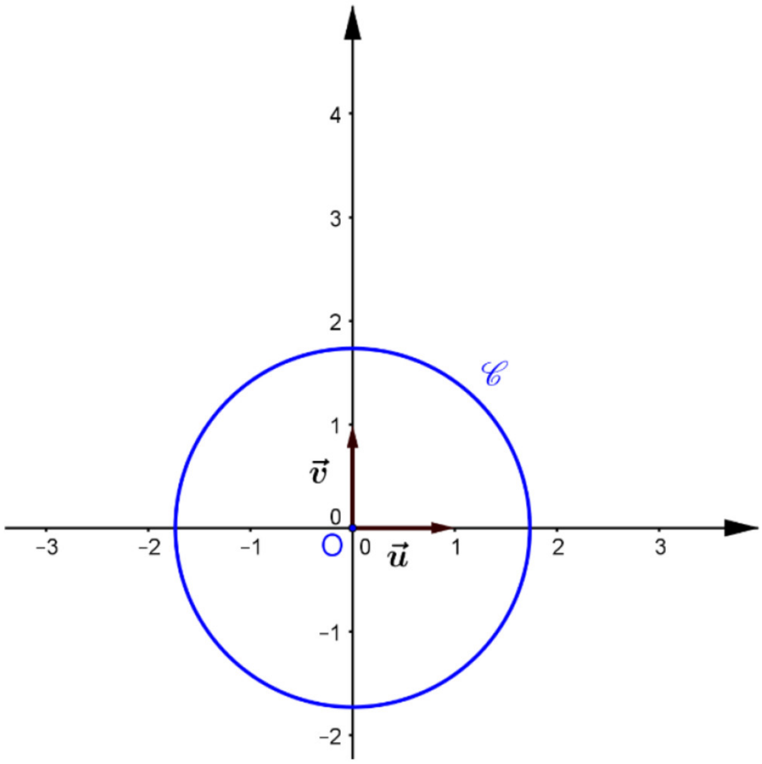
b) Soit k un réel, déterminer suivant k, lensemble E_k des points $M(z)$ tels que $z' = k$.

c) Montrer que si $Re(z) \neq 2$ on a :$|z' - z| = |z' - 2|$.

d) En déduire une construction du point M' connaissant le point M de $P-\Delta$.

Exercice 7

$(O, \vec{u}, \vec{v})$est un R.O.N.D du plan. ζ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.



1. Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{2}$.
   a) Montrer que $A \in \zeta$.
   b) Placer le point A.
2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $E : z^2 - 2i\sqrt{3}z - 6i = 0$.
   a) Montrer que E est équivalente à $(z - i\sqrt{3})^2 = 3a^2$.
   b) Résoudre l'équation E.
3. On considère les points K, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_k = i\sqrt{3}$, $z_1 = \sqrt{3}(-1 + i(1 - \sqrt{2}))$ et $z_2 = \sqrt{3}(1 + i(1 + \sqrt{2}))$.
   a) Vérifier que K est le milieu de $[M_1M_2]$.
   b) Montrer que les droites (M_1M_2) et (OA) sont parallèles.
   c) Montrer que $M_1M_2 = 6$.
   d) Construire les points K, M_1 et M_2.