

 <i>Lycée pilote de Tunis</i>	nombre complexes 3	<i>Terminales maths</i>
<i>Mr Ben Regaya. A</i>	+ Eléments de corrections	<i>www.ben-regaya.net</i>

Exercice 1

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectifs a, b et c .

Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $a\bar{b} - \bar{a}b + b\bar{c} - \bar{b}c + c\bar{a} - \bar{c}a = 0$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $|iz - 1| = |\bar{z} + 2i|$.
- Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $\frac{z}{z+1-i}$ soit réel. (puis le cas d'imaginaire pur)
- Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $z = 2i + 2e^{i\theta}$ avec θ réel quelconque.
- Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $\arg\left(\frac{iz-1}{z-2i}\right) \equiv 0 [2\pi]$
- Déterminer l'ensemble (A) des points M d'affixe z tels que $z^2 = (\bar{z})^2$. Tracer (A) .
- Soit (B) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^3 = (\bar{z})^2$.
 - Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z^3| = |\bar{z}^2|$.
 - En déduire l'ensemble (B) .
- Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que $z\bar{z} - (1+i)\bar{z} - (1-i)z = 0$. On pourra poser $Z = z - (1+i)$ et calculer le produit $Z\bar{Z}$. Construire (C) .
- Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $(z-a)(z-\bar{a}) = a\bar{a}$, avec a complexe.
- Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z| = \frac{4}{|z|} = |z-2|$.

Exercice 3

Soit $z \in \mathbb{C}$, on note M le point d'affixe z , P le point d'affixe z^2 et Q le point d'affixe z^3 .

Déterminer le lieu de M pour que :

- M, P et Q soient alignés.
- M, P et Q forment un triangle équilatéral.



Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Soit l'application f du plan $P \setminus \{I\}$ dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(f(z))$ telle que $z' = \frac{-1+z}{1-z}$.

1. Montrer que, pour tout complexe z distinct de 1, $|z'| = 1$.
2. Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b différents de 1 et tels que $f(A) = f(B)$.
 - a) Montrer que $(a-1)(1-\bar{b}) = (1-\bar{a})(b-1)$.
 - b) Dédire que les points A , B et I sont alignés.
3. Soit α un réel appartenant à $]0, 2\pi[$ et K le point d'affixe $e^{i\alpha}$. Montrer que $f(K) = K$.
4. Etant donné un point M du plan d'affixe $z \neq 1$ et M' son image par f .
 - a) Montrer que si $z' \neq 1$ alors $f(M) = f(M')$.
 - b) Dédire alors de ce qui précède une construction du point M' .

Exercice 5

Soit ω un complexe fixé.

1. Déterminer les complexes z tels que $z^2 + (2+iw)z + (iw+2-w) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux solutions.
 A, B les points d'affixes z_1 et z_2 et M d'affixe ω .
2. Déterminer le lieu géométrique des points tels que les points M, A, B soient alignés.

Exercice 6

Soit $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et l'équation $(E) : (1+iz)^3(1-i \tan \alpha) = (1-iz)^3(1+i \tan \alpha)$.

1. Montrer que si z est une solution de (E) alors z est réel.
2. Exprimer $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{2i\alpha}$.
3. Soit z un réel. Montrer qu'il existe un réel unique $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\tan \theta = z$.
4. Déterminer alors les solutions de (E) .



 Lycée pilote de Tunis	nombre complexes 3	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	Éléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

A, B et C sont alignés si et seulement $\frac{b-a}{c-a} = \frac{\overline{b-a}}{\overline{c-a}} \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} = \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}}$

$$\Leftrightarrow (b-a)(\bar{c}-\bar{a}) = (c-a)(\bar{b}-\bar{a})$$

$$\Leftrightarrow b\bar{c} - a\bar{c} - b\bar{a} + a\bar{a} = c\bar{b} - a\bar{b} + a\bar{a} - c\bar{a}$$

$$\Leftrightarrow a\bar{b} - \bar{a}b + b\bar{c} - \bar{b}c + c\bar{a} - \bar{c}a = 0.$$

Exercice 2

1. $|iz-1| = |\bar{z}+2i| \Leftrightarrow |i||z+i| = |z-2i| \Leftrightarrow |z-(-i)| = |z-2i| \Leftrightarrow MA = MB$ avec $A(-i)$ et $B(2i)$.

L'ensemble des points M est la médiatrice de $[AB]$

2. Pour $z \neq i-1$; $\frac{z}{z+1-i} = \frac{z_{\overline{OM}}}{z_{\overline{BM}}}$ avec $B(i-1)$.

Donc $\frac{z}{z+1-i}$ est réel $\Leftrightarrow \overline{OM}$ et \overline{BM} sont colinéaires $\Leftrightarrow M$ est un point de la droite (OB) .

L'ensemble des points M est la droite (OB) privée du point B . (Pareil pour le cas d'imaginaire pur).

3. $z = 2i + 2e^{i\theta} \Leftrightarrow z - 2i = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-2i| = 2 \\ \arg(z-2i) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM = 2 \\ (\vec{u}, \overline{AM}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(2i)$ et de rayon 2.

4. Pour $z \neq i$ et $z \neq 2i$; $\arg\left(\frac{iz-1}{z-2i}\right) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \arg(i) + \arg\left(\frac{z+i}{z-2i}\right) \equiv 0[2\pi]$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z+i}{z-2i}\right) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow (\overline{CM}, \overline{DM}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]; C \text{ et } D \text{ les points d'affixes respectives } 2i \text{ et } -i.$$

L'ensemble des points M est le demi cercle ouvert de diamètre $[CD]$ situé dans le demi plan $x < 0$.

7. $Z\bar{Z} = z\bar{z} - (1-i)\bar{z} - (1-i)z + 2$ donc $z\bar{z} - (1-i)\bar{z} - (1-i)z = 0 \Leftrightarrow Z\bar{Z} = 2$

$$\Leftrightarrow |Z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z - (1+i)| = \sqrt{2}$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $I(1+i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

8. $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = a\bar{a} \Leftrightarrow |z-a|^2 = |a|^2 \Leftrightarrow AM = OA$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(a)$ et de rayon OA .



$$9. |z| = \frac{4}{|z|} = |z-2| \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \frac{4}{|z|} \\ |z| = |z-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 4 \\ |z| = |z-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = 2 \\ OM = AM \end{cases} \text{ avec } A(2).$$

L'ensemble des points M est l'intersection de la médiatrice de $[OA]$ avec le cercle de centre O et de rayon 2.
(Il ya deux points chercher les).

Exercice 3

1. M, P et Q alignés $\Leftrightarrow \frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R}$ ou $z^2 = z \Leftrightarrow z+1 \in \mathbb{R}$ ou $z=0$ ou $z=1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. Le lieu cherché est l'axe des abscisses.

$$2. M, P \text{ et } Q \text{ forment un triangle équilatéral} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3 - z| = |z^2 - z| \\ |z^2 - z| = |z^3 - z^2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z||z-1||z+1| = |z||z-1| \\ |z||z-1| = |z^2||z-1| \end{cases}$$

On traite à part les cas $z=0$ et $z=1$ (les trois points sont confondus), on peut alors supposer $z \neq 0$ et $z \neq 1$.

On obtient alors $\begin{cases} |z+1|=1 \\ |z|=1 \end{cases}$. Le point M est donc sur le cercle centré en $A(-1)$ et de rayon 1 et sur le cercle trigonométrique.

$$\text{On résous donc le système : } \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Les seules possibilités sont $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 4

$$1. |z'| = \left| \frac{-1+z}{1-\bar{z}} \right| = \frac{|z-1|}{|1-\bar{z}|} = \frac{|z-1|}{|1-z|} = \frac{|z-1|}{|z-1|} = 1. \text{ rappelons que } |t| = |\bar{t}| \text{ et } |t| = |-t| \text{ pour tout complexe } t.$$

$$2. a) f(A) = f(B) \Leftrightarrow \frac{-1+a}{1-\bar{a}} = \frac{-1+b}{1-\bar{b}} \Leftrightarrow (a-1)(1-\bar{b}) = (b-1)(1-\bar{a}).$$

$$b) \text{ on a : } (a-1)(1-\bar{b}) = (b-1)(1-\bar{a}) \text{ donc } \arg[(a-1)(1-\bar{b})] \equiv \arg[(b-1)(1-\bar{a})] [2\pi] \text{ (} a \text{ et } b$$

différents de 1) par suite $\arg(a-1) + \arg(1-\bar{b}) \equiv \arg(b-1) + \arg(1-\bar{a}) [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg(a-1) - \arg(1-b) \equiv \arg(b-1) - \arg(1-a) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(a-1) - \pi - \arg(b-1) \equiv \arg(b-1) - \pi - \arg(a-1) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2\arg(a-1) - 2\arg(b-1) \equiv 0 [2\pi] \Leftrightarrow \arg(a-1) - \arg(b-1) \equiv 0 [\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{IA}) - (\vec{u}, \vec{IB}) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow (\vec{IB}, \vec{IA}) \equiv 0 [\pi] \text{ et donc } (\vec{IB}, \vec{IA}) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ et donc les points sont alignés.}$$

$$3. \frac{-1+e^{i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}} = \frac{(e^{i\alpha}-1)e^{i\alpha}}{(1-e^{-i\alpha})e^{i\alpha}} = \frac{(e^{i\alpha}-1)e^{i\alpha}}{(e^{i\alpha}-1)} = e^{i\alpha}. \text{ Ainsi } f(K) = K.$$

$$4. a) z' \neq 1 \text{ donc } z-1 \neq 1-\bar{z} \Leftrightarrow z+\bar{z} \neq 2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \neq 1.$$



$$\text{L'affixe du point } f(M') \text{ est } \frac{-1+z'}{1-\bar{z}'} = \frac{-1+\frac{-1+z}{1-\bar{z}}}{1-\frac{-1+\bar{z}}{1-z}} = \frac{-2+z+\bar{z}}{2-z-\bar{z}} = -\frac{1-\bar{z}}{1-z} = z' \text{ on a donc } f(M') = f(M).$$

b) Soit M un point distinct de I .

Si $x_M = 1$ alors $z = 1+iy$, y réel et donc $z' = \frac{-1+1+iy}{1-(1-iy)} = 1 = z_I$ ce qui veut dire que $M' = I$.

Tout point du cercle trigonométrique est son propre image.

Si $x_M \neq 1$ et $|z| \neq 1$ donc $z' \neq 1$ on sait que dans ce cas que $f(M) = f(M')$ et que les points M, M' et I sont alignés ce qui veut dire que le point M' est un point de la droite (OM) mais aussi $|z'| = 1$ donc M' est un point du cercle trigonométrique.

M' est alors l'intersection du cercle trigonométrique et de la droite (OM) .

Exercice 5

- On a $\Delta = (i(w-2))^2 \Rightarrow z_1 = -1-i, z_2 = -iw-1+i$.
- Les trois points sont alignés si et seulement si $\frac{(-iw-1+i)-(-1-i)}{w-(-1-i)} \in \mathbb{R}$ ou $w = -1-i$

$$\text{Ce qui s'écrit } \frac{(-iw-1+i)-(-1-i)}{w-(-1-i)} = \frac{(-iw-1-i)-(-1-i)}{w-(-1-i)} \text{ ou } w = -1-i$$

$$\Leftrightarrow i \frac{w-2}{w+1+i} = -i \frac{\bar{w}-2}{\bar{w}+1-i} \quad \text{ou } w = -1-i$$

$$\Leftrightarrow 2w\bar{w} - (w+\bar{w}) - i(w-\bar{w}) - 4 = 0 \quad \text{ou } w = -1-i$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0 \quad \text{ou } w = -1-i$$

Le lieu de M est donc le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Exercice 6

- Soit z une solution de (E) alors $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$

$$\Rightarrow |1+iz|^3 |1-i\tan\alpha| = |1-iz|^3 |1+i\tan\alpha|$$

$$\Leftrightarrow |1+iz|^3 (1+\tan^2\alpha) = |1-iz|^3 (1+\tan^2\alpha) \Leftrightarrow |1+iz|^3 = |1-iz|^3 \text{ car } 1+\tan^2\alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow |1+iz| = |1-iz| \text{ (car la fonction } x \mapsto x^3 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (1+iz) \times \overline{(1+iz)} = (1-iz) \times \overline{(1-iz)}$$



$$\Leftrightarrow (1+iz) \times (1-i\bar{z}) = (1-iz) \times (1+i\bar{z})$$

$\Leftrightarrow \bar{z} = z$ (après simplification bien sur) . Ainsi z est réel.

$$2. \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} = \frac{1+i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1-i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

$$3. \text{ Posons } f(\theta) = \tan \theta ; \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

f est dérivable sur cet intervalle et $f'(\theta) = 1 + \tan^2 \theta > 0$, f est alors strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et

$$\text{par suite } f\left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) = \left[\lim_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f, \lim_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f \right] = \mathbb{R}$$

$$f \text{ est continue sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et } f\left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) = \mathbb{R}.$$

Ainsi tout z réel admet un unique antécédent par f . Autrement dit si z est réel alors il existe un réel unique

$$\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ tel que } \tan \theta = z.$$

$$4. \text{ Comme } z = \tan \theta \text{ alors l'équation devient } (1+i \tan \theta)^3 (1-i \tan \alpha) = (1-i \tan \theta)^3 (1+i \tan \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} \right)^3 = \left(\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} \right) \Leftrightarrow e^{6i\theta} = e^{2i\alpha} \Leftrightarrow 6\theta = 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\}.$$

$$\text{Ainsi } \theta \in \left\{ \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}, \frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right\} \text{ (on rappelle que } \tan(\pi + a) = \tan(a) \text{)}.$$

$$\text{Finalement les solutions sont donc : } \tan \frac{\alpha}{3}; \tan \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right); \tan \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right).$$

