Lycée pilote de Tunis	**Nombres Complexes 4**	*Terminales maths*
Mr Ben Regaya. A	**+éléments de Corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice 1

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l' équation $z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0$.
2. Résoudre dans l'ensemble des complexes les équations $z+\frac{1}{z}=1$ puis $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$.
3. Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z défini par :
   $P(z)=z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1$
   Vérifier que pour tout z non nul, on a $\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+\sqrt{2})\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}$.
   En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Exercice2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^2-\frac{1}{2}(1+3i)z-1=0$.

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct, (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

2. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
3. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha\in[0\,;2\pi]$.
   On considère l'application f qui tout point M de (C), associe $f(M)=MA\times MB$

a) Montrer l'égalité suivante :
$f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

b) En déduire l'égalité suivante : $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2sin\alpha\right)^2}$

4. a) Montrer qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal.
   Donner cette valeur minimale.
   b) Montrer qu'il existe un seul point M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal
   Donner cette valeur maximale.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(-1+3i)z-3i=0$
   Soit a un nombre complexe différent de i et $-i$.
2. a) Vérifier que le nombre complexe $u = a + i$ est solution de l'équation $(E): z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$
   b) Déterminer l'autre solution de (E). On notera v cette solution.
3. On suppose que $|a|=1$.
   a)Montrer que $\frac{u}{v}\in\mathbb{R}$.
   b)Vérifier que $u^2=a\left[\left(a-\overline{a}\right)+2i\right]$.

c)En déduire que $arg(u) \equiv \frac{1}{2} arg(a) + \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice4

On considère l'équation (E) : $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné.

1. Montrer que les solutions de (E) sont imaginaires pures.
2. Montrer que les solutions de (E) sont deux à deux opposées.
3. Résoudre (E).

Exercice5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

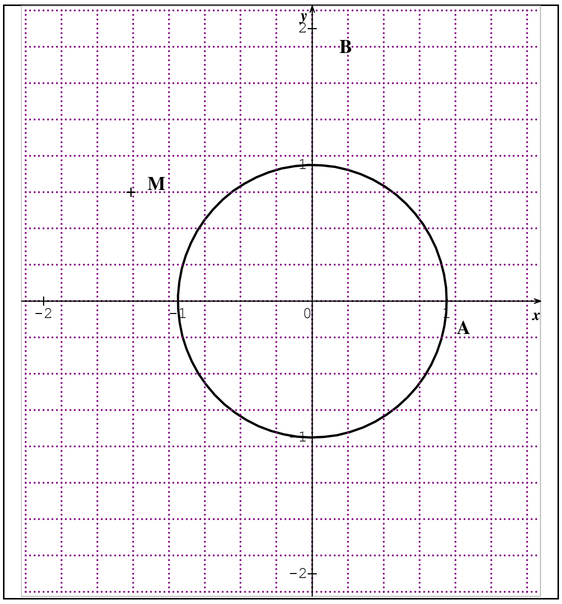
On considère les points A, M et M' d'affixes respectives : 1 , z et z^3 .

1. a) Montrer que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si $z = 1$ ou $(1 + z + z^2)$ est réel

   b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que A, M et M' sont alignés
2. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 1$.

   b) Soit N le point d'affixe $z_N = -(z^2 + 2)$ Déterminer les nombres complexes z pour que le quadrilatère $AMNM'$ soit un parallélogramme.

Exercice6



1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes l'équation $-\frac{i}{2} z^2 - \left(1 - \frac{i}{2}\right) z + 1 = 0$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   Soit $A(1)$ et $B(2i)$.

   Soit f l'application du plan privé du point B dans lui-même qui a tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que

   $z' = \frac{2i - z}{2i + \bar{z}}$.

   a) Vérifier que $|z'| = 1$. En déduire que M' est un point du cercle de centre O et de rayon 1.

   b) Montrer que $\frac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{BM}}} = -\frac{z + \bar{z}}{|z - 2i|^2}$. En déduire que $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.

   Sur le graphique , on a placer un point $M \notin (O, \vec{v})$ Construire son image M' par f.

   c) Déterminer l'ensemble Δ des points M tel que $f(M) = A$.

   d) Soit $A' = f(A)$ .Vérifier que $A' \notin \Delta$ et que A' est un point commun au cercle de centre O et de rayon 1 et la droite (BA)

   e) Démontrer géométriquement que le point A' est le seul point invariant par f.

Lycée pilote de Tunis	Nombres Complexes 4	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	éléments de Corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

1. Cette équation est de la forme $z^2 - Sz + P = 0$ avec $\begin{cases} S = 1+\sqrt{2} \\ P = 1\times\sqrt{2} \end{cases}$ donc les solutions de cette équation sont 1 et $\sqrt{2}$.

2. $z+\dfrac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}+1=0 \Leftrightarrow \left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2 = -\dfrac{3}{4} = \left(i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ et donc deux solutions $\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2} \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left(z-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ et donc deux solutions $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $z=0$ n'est pas racine de $P(z)$ donc $\dfrac{P(z)}{z^2} = \dfrac{z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1}{z^2}$

   $= z^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)z + \left(2+\sqrt{2}\right) - \left(1+\sqrt{2}\right)\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} = z^2 + \dfrac{1}{z^2} - \left(1+\sqrt{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{z}\right) + \left(2+\sqrt{2}\right)$

   $= \left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2 - 2 - \left(1+\sqrt{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{z}\right) + \left(2+\sqrt{2}\right) = \left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$ c'est le résultat demandé.

   D'après la question 1. On obtient tout de suite : $z+\dfrac{1}{z}=1$ ou $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ et donc l'équation $P(z)=0$ admet quatre solutions $\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice2

1. $\Delta = \dfrac{1}{4}(1+3i)^2 + 4 = 2 + \dfrac{3}{2}i = \dfrac{1}{4}(8+6i) = \dfrac{1}{4}(3+i)^2$ et donc une racine carré de Δ est $\delta = \dfrac{1}{2}(3+i)$.

   et donc $z_1 = \dfrac{-1+i}{2}$ et $z_1 = 1+i$ et l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ est $\left\{\dfrac{-1+i}{2}.1+i\right\}$.

   $z_A = \sqrt{2}\left(cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + isin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z_B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+isin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

3. M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$.

   a) $f(M) = MA \times MB = |z_M - z_A| \times |z_M - z_B| = \left|e^{i\alpha} - (1+i)\right| \times \left|e^{i\alpha} - \dfrac{1}{2}(-1+i)\right|$

   $= \left|\left(e^{i\alpha}-(1+i)\right)\times\left(e^{i\alpha}-\dfrac{1}{2}(-1+i)\right)\right| = \left|e^{2i\alpha} - 1 - \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$

   b) On a : $f(M) = \left|e^{i\alpha}\right| \times \left|e^{i\alpha} - e^{i(-\alpha)} - \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)\right|$

   $= 1 \times \left|2isin(\alpha) - \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)\right| = \left|-\dfrac{1}{2} + i\left(-\dfrac{3}{2}+2sin(\alpha)\right)\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{3}{2}+2sin(\alpha)\right)^2}$.

4. a) f(M) est minimal $-\frac{3}{2}+2sin(\alpha)=0 \Leftrightarrow sin(\alpha)=\frac{3}{4}$

On sait que $sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1 \Leftrightarrow cos^2(\alpha)=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16} \Leftrightarrow cos(\alpha)=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

Et comme $M\left(cos(\alpha),sin(\alpha)\right)$, on obtient 2 points : $M_1\left(\frac{\sqrt{7}}{4},\frac{3}{4}\right)$ et $M_2\left(-\frac{\sqrt{7}}{4},\frac{3}{4}\right)$. La valeur minimale dans ce cas est $\frac{1}{2}$.

b) f(M) est maximal $\Leftrightarrow sin(\alpha)=-1$ et dans ce cas $cos(\alpha)=0$. Le seul point qui répond est $M(0,-1)$.

La valeur maximale dans ce cas est $\frac{\sqrt{50}}{2}$.

Exercice 3

1. L'équation est de la forme $z^2-S\times z+P=0$ avec $\begin{cases} S=-1+3i \\ P=(-1)\times 3i \end{cases}$ donc l'ensemble des solutions dans ℂ est $\{-1,3i\}$.

2. a) Vérifions que le nombre complexe $u=a+i$ est solution de l'équation (E).

$(a+i)^2-(1+a)(1+i)(a+i)+(1+a^2)i$

Or $(a+i)^2+(1+a^2)i=a^2+2ai-1+i+ia^2$ et

$(1+a)(1+i)(a+i)=(a+i+ia+1)(a+i)=(a+i)^2+(ia+1)(a+i)=a^2+2ai-1+ia^2+a+i-a$

$=a^2+2ai-1+ia^2+i$. Donc la différence donne zéro et par suite $u=a+i$ est solution de l'équation (E).

b) On sait que le produit des racines d'une équation du second degré est $\frac{c}{a}$ et que leur somme est $-\frac{b}{a}$.

Donc $u\times v=\frac{c}{a}=\frac{(1+a^2)i}{1} \Leftrightarrow v\times(a+i)=(1+a^2)i \Leftrightarrow v\times(a+i)=(1+a^2)i \Leftrightarrow v=i\times\frac{(1+a^2)}{a+i}$

$\Leftrightarrow v=i\times\frac{(1+a^2)}{a+i}=i\times\frac{(a+i)(a-i)}{a+i}=i(a-i)=1+ia$.

3. a) On suppose que $|a|=1 \Leftrightarrow a\times\bar{a}=1$

$\frac{u}{v}=\frac{a+i}{1+ia}=\frac{(a+i)(1-i\bar{a})}{|1+ia|^2}=\frac{a+\bar{a}+i-ia\bar{a}}{|1+ia|^2}=\frac{a+\bar{a}}{|1+ia|^2}=\frac{2Re(a)}{|1+ia|^2}$ qui est un réel. C'est le résultat demandé.

b) Vérifions que $u^2=a\left[\left(a-\bar{a}\right)+2i\right]$.

$u=a+i$ donc $u^2=a^2+2ai-1$.

Or $a\left[\left(a-\bar{a}\right)+2i\right]=a^2-|a|^2+2ia$. D'où l'égalité souhaitée.

c) On a $u^2=a\left[\left(a-\bar{a}\right)+2i\right]$ donc $2arg(u)\equiv arg(a)+arg\left[\left(a-\bar{a}\right)+2i\right][2\pi]$

$\Leftrightarrow 2arg(u)\equiv arg(a)+arg[2i\times Im(a)+2i][2\pi] \Leftrightarrow 2arg(u)\equiv arg(a)+arg\left[2i\left(Im(a)+1\right)\right][2\pi]$

$\Leftrightarrow 2arg(u)\equiv arg(a)+\frac{\pi}{2}+arg\left[\left(Im(a)+1\right)\right][2\pi]$

Or $|a|=1$ et $a\neq i$ et on sait que $|a|\succ Im(a)$ donc $1+Im(a)\succ 0$ et par suite $arg\left[\left(Im(a)+1\right)\right]\equiv 0[2\pi]$.

Ainsi $2arg(u)\equiv arg(a)+\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Soit encore $arg(u)\equiv\frac{1}{2}arg(a)+\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 4

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient $M(z), A(1)$ et $B(-1)$.

   z Solution de $(E) \Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Rightarrow |z-1|^n = |z+1|^n$ et par suite $|z-1| = |z+1|$

   (car $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.) et donc $MA = MB$ donc M est un point de la médiatrice de $[AB]$ ou encore que M est un point de la droite $(O, \vec{u})$ et que z est un imaginaire pur .

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ $(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n \left((z+1)^n - (z-1)^n\right) = -(-1)^n \left((z-1)^n - (z+1)^n\right)$

   Par suite z solution de (E) $\Leftrightarrow (z-1)^n - (z+1)^n = 0 \Leftrightarrow (-z-1)^n - (-z+1)^n = 0 \Leftrightarrow -z$ solution de (E).

3. Soit $z \in \mathbb{C}$.

   Si z est solution de (E) alors $z \neq 1$ car si non $0 = 2^n$

   z solution de (E) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tel que $z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1)$

   $\Leftrightarrow \exists k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ tel que $z = \dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}$

   $\Leftrightarrow \exists k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ tel que $z = \dfrac{2i\, sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\, cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = i\, cotan\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice5

1. a) Les points A, M et M' sont alignés si et seulement si $M = A$ ou $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}$ est réel.

   si et seulement si $z = 1$ ou $\dfrac{z^3-1}{z-1}$ est réel . Et comme $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$, on en déduit que Les points A, M et M' sont alignés si et seulement si $z = 1$ ou $(1+z+z^2)$ est réel.

   b) Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

   $1 + z + z^2 = (x^2 - y^2 + x + 1) + i(2xy + y)$

   Ainsi les points A, M et M' sont alignés si et seulement si $M = A$ *ou* $y(2x+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$.

   Conclusion l'ensemble des points $M(z)$ tels A, M et M' sont alignés est la réunion des deux droites $\Delta_1 : y = 0$ et $\Delta_2 : x = -\dfrac{1}{2}$.

2. ***Rappelons que les racines nièmes*** $(n \geq 2)$ ***d'un complexe non nul*** $a = re^{i\theta}, r \succ 0$ ***sont les complexes***

   $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$.

   Dans notre cas $z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1 \times e^{i0}$ les solutions sont les complexes

   $z_k = \sqrt[4]{1}\, e^{i\left(\frac{0}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$ et donc les solutions sont les complexes 1, -1, i et - i.

   b) le quadrilatère $AMNM'$ soit un parallélogramme signifie $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M'N} \Leftrightarrow z - 1 = z_N - z^3$ et $M \neq A$

   $\Leftrightarrow z - 1 = -z^2 - 2 - z^3 \Leftrightarrow z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ et $z \neq 1$

   $\Leftrightarrow \dfrac{z^4-1}{z-1} = 0 \Leftrightarrow z^4 - 1 = 0$ et donc les complexes z demandés sont -1, i et - i.

Exercice 6

1. Il suffit de remarquer que $a+b+c=0$ donc les solutions sont 1 et $\frac{c}{a}=2i$.

2. a) $|z'|=\left|\frac{2i-z}{2i+\bar{z}}\right|=\left|\frac{\overline{2i-z}}{\overline{2i+\bar{z}}}\right|=\left|\frac{-2i-\bar{z}}{2i+z}\right|$

$=\left|\frac{2i+\bar{z}}{2i+\bar{z}}\right|=1$ donc $OM'=1$ et par suite M' est un point du cercle de centre O et de rayon 1.

b) $\frac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}=\frac{z'-1}{z-2i}=\frac{\frac{2i-z}{2i+\bar{z}}-1}{z-2i}=\frac{2i-z-2i-\bar{z}}{(z-2i)(2i+\bar{z})}=-\frac{z+\bar{z}}{(z-2i)(2i+\bar{z})}=-\frac{z+\bar{z}}{|z-2i|^2}$

on rappelle que $|z|^2=z\times\bar{z}$ et $\overline{z-2i}=\bar{z}+2i$.

On vient de prouver que $\frac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}=-\frac{z+\bar{z}}{|z-2i|^2}$ qui est un nombre réel donc les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.

Le point M' n'est autre que le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 1 avec la droite parallèle à (BM) passant par A.

c) $f(M)=A$ signifie $z'=1 \Leftrightarrow \frac{2i-z}{2i+\bar{z}}=1 \Leftrightarrow 2i-z=2i+\bar{z} \Leftrightarrow -z=\bar{z} \Leftrightarrow \bar{z}+z=0$ ce qui signifie que z est imaginaire pur.

l'ensemble Δ des points M tel que $f(M)=A$ est la droite des ordonnées.

d) Le point $A'=f(A)$ a pour affixe $z'=\frac{2i-1}{2i+1}=\frac{(2i-1)(-2i+1)}{5}=\frac{3+4i}{5}$ et il clair que A' n'appartient pas à Δ.

e) Remarquons tout d'abord que $\left|\frac{3+4i}{5}\right|=1$ donc le point A' est un point du cercle de centre O et de rayon 1

Aussi

$\frac{z_{A'}-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\frac{3+4i}{5}-1}{2i-1}=\frac{-2+4i}{5(-1+2i)}=\frac{-2}{5}$ qui est réel et donc A' appartient à la droite (BA)

D'autre part on sait que le point M' image de M est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 1 avec la droite parallèle à (BM) passant par A.

Donc si un point M est égale à son image par f alors M est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 1 avec la droite (BA) c'est le point A'.

Le point A' est le seul point invariant par f.