Lycée pilote de Tunis	**Nombres Complexes 1**	*Terminales Maths & S-Exp*
Mr : Ben Regaya. A	**+ éléments de Corrections**	*www.ben-regaya.net*

Exercice1

Donner une forme trigonométrique de z, puis sa forme algébrique en tenant compte des conditions imposées.

a) $arg(iz) \equiv \frac{3\pi}{4}\left[2\pi\right]$ *et* $\left|(1+i)\,z\right| = 2$; b) $arg\left(\frac{\overline{z}}{1+i}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$ *et* $\left|\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{4}$;

c) $arg\left(\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$ et $\left|\overline{z}\right| = 2$.

Exercice2

1. Montrer que pour tout entier relatif n, $(1+i)^n + (1-i)^n = 2(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.
2. Montrer que pour tout entier relatif n, $\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3^n}}\, i\ sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.

Exercice3

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, M et le point d'affixe z.

1. N est le point d'affixe $z^2 - 1$ .Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient Orthogonaux ?
2. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$. **On recherche** l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.

   a) Montrer que $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right) = -\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.

   b) Conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice4

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. A tout point M d'affixe z non nul on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = -\frac{1}{\overline{z}}$.

1. a) Exprimer $arg\left(z'\right)$ en fonction de $arg\left(z\right)$.

   b) En déduire que les points O, M et M' sont alignés.
2. Montrer que $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}\left(z-1\right)$.
3. Soit $A(1)$, B (-1) et (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

   a) Montrer que si M est un point de (C) alors $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$.

   b) Construire le point M' connaissant M sur (C)\\$\left\{O\right\}$.

Exercice5

1. Mettre sous forme exponentielle le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.En déduire les valeurs exactes de $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
2. Le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par M et N les points d'affixes respectives $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = ie^{i\theta}$ avec θ un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   Montrer que le triangle OMN est rectangle et isocèle.
3. Soit $\omega = \dfrac{1+z_1z_2}{z_1+z_2}$.

   a) En remarquant que $|z_1| = |z_2| = 1$ montrer que $\omega \in \mathbb{R}$.

   b) Montrer que $\omega = \sqrt{2}\,cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

   c) Montrer que $\left(\vec{u},\overrightarrow{MN}\right) \equiv \theta + \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice6

On note j le complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Pour tout complexe z, on pose $Z = z + j^2\,\bar{z}$.

1. Vérifier que $j^2 = \bar{j}$ *et* $j^3 = 1$.
2. Montrer que pour tout complexe z, $|Z|^2 = 2|z|^2 + 2R\acute{e}(jz^2)$.
3. Montrer que pour tout complexe z, $\left(j^2Z\right)$ est réel.

Exercice7

Soit le complexe w de module 1 et dont un argument est $\frac{2\pi}{5}$.

1. Vérifier que $w^5 = 1$. En déduire que : $1+w+w^2+w^3+w^4 = 0$.
2. Montrer que $w^3 = (\bar{w})^2$ et $w^4 = \bar{w}$.
3. En déduire que $(w+\bar{w})^2 + w+\bar{w} - 1 = 0$.
4. Calculer $w+\bar{w}$ et en déduire $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice8 ***<u>Pour prendre des initiatives</u>***

« ***Questions indépendantes*** »

1. Soient a, b et c des complexes, montrer que $|1+a|+|a+b|+|b| \geq 1$.
2. Soit z un complexe de module 1, calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.
3. Soit u un complexe de module 1, montrer que $Re\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}$.
4. Résoudre l'équation $z^3 = \bar{z}$
5. Soient a et b deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$, montrer que $\dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

Lycée pilote de Tunis	Nombres Complexes 1	Terminales Maths & S-Exp
Mr : Ben Regaya. A	éléments de Corrections	www.ben-regaya.net

Correction 1

$arg(iz) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $|(1+i)z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\,|z| = 2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$.

Ainsi z est le complexe de module $\sqrt{2}$ et dont un argument est $\frac{\pi}{4}$ donc

$z = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1+i$.

Correction 2

1. $1+i = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow (1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$. De même

   $(1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-n\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ou encore $(1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - i\,sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

   Ainsi $(1+i)^n + (1-i)^n = 2(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Correction 3

1. On pose $z = x+iy$ avec x et y réels, dans ce cas $M(x,y)$ et $N\left(x^2-y^2-1, 2xy\right)$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont Orthogonaux signifie $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-y^2-1\right) + y \times 2xy = 0$

   $\Leftrightarrow x\left(x^2-y^2-1+2y^2\right) = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2+y^2-1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2+y^2 = 1$. Ainsi l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient Orthogonaux est soit le cercle trigonométrique soit la droite des ordonnées.

2. a) $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right) = \left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z}^2-1\right) = -\overline{z}^2\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\frac{1}{\overline{z}^2}-1\right) = -\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$ (On rappel que $Z\overline{Z} = |Z|^2$ et $\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)} = \frac{1}{\overline{z}^2}-1$.

   b) Les points O, N et P soient alignés signifie $\frac{z_{\overrightarrow{OP}}}{z_{\overrightarrow{ON}}}$ est réel signifie $\frac{z_P}{z_N}$ est réel signifie $\frac{z_P \times \overline{z_N}}{|z_N|^2}$ est réel .Ainsi

   les points O, N et P soient alignés signifie $z_P \times \overline{z_N} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)$ est réel , et donc d'après a)

   $-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$ est réel soit encore $\overline{z}^2$ est réel (puisque $\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2 \in \mathbb{R}$) .

   Mais $\overline{z}^2$ est réel signifie $xy = 0$ et donc $x = 0$ ou $y = 0$. L'ensemble recherché est la réunion des deux axes du repère.

Correction 4

1. a) $arg(z') \equiv arg\left(-\frac{1}{z}\right)[2\pi] \Leftrightarrow arg(z') \equiv \pi + arg\left(\frac{1}{z}\right)[2\pi] \Leftrightarrow arg(z') \equiv \pi - arg\left(\overline{z}\right)[2\pi]$

   $\Leftrightarrow arg(z') \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$

b) On a $arg(z') \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$ ce qui se traduit géométriquement par $(\vec{u},\overrightarrow{OM'}) \equiv \pi + (\vec{u},\overrightarrow{OM})[2\pi]$ ou encore $(\overrightarrow{OM},\vec{u}) + (\vec{u},\overrightarrow{OM'}) \equiv \pi[2\pi]$ soit encore d'après la relation de Chasles $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) \equiv \pi[2\pi]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires de sens contraire et par suite les points *O, M* et *M'* sont alignés.

2. Montrons que $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

   On a $\overline{z'+1} = \overline{\frac{-1}{\overline{z}}} + 1 = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} = \frac{1}{z}(z-1)$.

3. a) Montrons que si M est un point de ($\mathcal{C}$) alors $|z'+1| = |z'|$.

   On a : $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$ et par passage au module on aura $|\overline{z'+1}| = \left|\frac{1}{z}(z-1)\right|$ et d'après les propriétés des modules on peut écrire : $|z'+1| = \left|\frac{1}{z}\right||z-1|$ et comme M est un point de ($\mathcal{C}$) alors $AM = 1$ ou encore $|z-1| = 1$ et par conséquent $|z'+1| = \left|\frac{1}{z}\right|$ de plus $\left|\frac{1}{z}\right| = \left|-\frac{1}{z}\right| = \left|-\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}\right| = \left|-\frac{1}{\overline{z}}\right| = |z'|$ on obtient finalement $|z'+1| = |z'|$

   .

   b) Construction du point M' connaissant M sur le cercle (C)\$\{O\}$.

   On sait d'après 1.b) que

   Pour M point quelconque du plan On sait d'après 1.b) que le point M' appartient à la droite (OM) et que si M un point donné le cercle ($\mathcal{C}$)\$\{O\}$ alors $|z'+1| = |z'|$ ou encore que $BM' = OM'$ ce qui veut dire que le point M' appartient à la médiatrice de $[OB]$.

   Conclusion : Le point M' n'est autre que le point d'intersection de la droite (OM) avec la médiatrice du segment $[OB]$.

Correction 5

1. $(\sqrt{3}+i)e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

   On cherche maintenant l'écriture algébrique de $(\sqrt{3}+i)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   $(\sqrt{3}+i)e^{i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{3}+i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et donc

   $2cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2. $\frac{z_2}{z_1} = i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON} \\ OM = ON \end{cases}$ et par suite le triangle OMN est rectangle et isocèle

3. Montrer que $\omega = \frac{1+z_1z_2}{z_1+z_2}$ est réel.

   $\overline{\omega} = \frac{\overline{1+z_1z_2}}{\overline{z_1+z_2}} = \frac{1+\overline{z_1}\times\overline{z_2}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}} = \frac{1+\frac{1}{z_1}\times\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}} = \omega$ donc ω est réel.

b) $\omega=\dfrac{1+ie^{2i\theta}}{e^{i\theta}+ie^{i\theta}}=\dfrac{e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}+ie^{i\theta}\right)}{e^{i\theta}(1+i)}=\dfrac{\left(e^{-i\theta}+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right)}{(1+i)}$

$=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{2cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right).$

c) $\left(\vec{u},\overrightarrow{MN}\right)\equiv arg\left(z_N-z_M\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\vec{u},\overrightarrow{MN}\right)\equiv arg\left(ie^{i\theta}-e^{i\theta}\right)[2\pi]$

$\Leftrightarrow\left(\vec{u},\overrightarrow{MN}\right)\equiv arg\left(e^{i\theta}\right)+arg(-1+i)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\vec{u},\overrightarrow{MN}\right)\equiv\theta+\dfrac{3\pi}{4}[2\pi].$

Correction 6

1. $j^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{-\frac{2i\pi}{3}}=\overline{j}$ et $j^3=e^{i\frac{6\pi}{3}}=e^{i0}=1$.

2. $|Z|^2=Z\times\overline{Z}=\left(z+j^2\overline{z}\right)\left(\overline{z+j^2\overline{z}}\right)=\left(z+j^2\overline{z}\right)\left(\overline{z}+\overline{j^2}z\right)=z\times\overline{z}+j^2\overline{z^2}+z^2\overline{j^2}+j^2\overline{j^2}z\overline{z}$ et comme

   $j^2\overline{j^2}=j^3=1$ alors $|Z|^2=2\,z\times\overline{z}+\overline{j}\,\overline{z^2}+z^2\,j=2\,z\times\overline{z}+\overline{jz^2}+z^2\,j=2|z|^2+2Re\left(z^2\,j\right)$.

3. $j^2Z=j^2z+j^4\overline{z}=\overline{j}\,z+j\,\overline{z}=\overline{j}\,z+\overline{\overline{j}\,z}=2Re\left(\overline{j}\,z\right)\in\mathbb{R}$.

Correction 7

1. Remarquons que $w=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et donc $w^5=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5=e^{2i\pi}=1$.

   Déduction :

   On pose $S=1+w^2+w^3+w^4$. On $w\times S=w+w^2+w^3+w^4+w^5$ et donc

   $S-wS=1-w^5=0\Leftrightarrow S(1-w)=0$ et comme $w\neq1$ alors $S=0$.

2. $(\overline{w})^2=e^{-i\frac{4\pi}{5}}=e^{i\frac{6\pi}{5}}=w^3$ et $w^4=e^{i\frac{8\pi}{5}}=e^{-i\frac{2\pi}{5}}=\overline{w}$.

3. On sait que $1+w+w^2+w^3+w^4=0$ donc $1+w+w^2+\overline{w}^2+\overline{w}=0\Leftrightarrow1+\left(w+\overline{w}\right)+\left(w+\overline{w}\right)^2-2w\overline{w}=0$

   $\Leftrightarrow1+\left(w+\overline{w}\right)+\left(w+\overline{w}\right)^2-2=0\Leftrightarrow\left(w+\overline{w}\right)^2+\left(w+\overline{w}\right)-1=0$.

4. On remarque que $w+\overline{w}$ est l'une des solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ qui a pour solutions

   $X_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $X_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et comme $w+\overline{w}=2Re(w)\succ0$ alors $w+\overline{w}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

   On sait que $w+\overline{w}=2cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\Rightarrow cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Correction 8

1. On a $1=|1+a-a-b+b|\leq|1+a|+|-a-b|+|b|=|1+a|+|a+b|+|b|$

2. $|1+z|^2+|1-z|^2=(1+z)(1+\overline{z})+(1-z)(1-\overline{z})=1+z+\overline{z}+z\overline{z}+1-z-\overline{z}+z\overline{z}=4$ car $z\overline{z}=|z|^2=1$.

3. Il s'agit de prouver que $\dfrac{1}{1-u}+\overline{\left(\dfrac{1}{1-u}\right)}=\dfrac{1}{1-u}+\dfrac{1}{1-\overline{u}}=1$.

Mais puisque $|u|=1$, on a $\overline{u}=\frac{1}{u}$ donc $\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1-\frac{1}{u}}=\frac{1}{1-u}+\frac{u}{u-1}=\frac{1}{1-u}-\frac{u}{1-u}=1$. D'où le résultat.

4. On localise z en passant aux modules
$z^3=\overline{z}\Rightarrow|z|^3=|z|\Rightarrow|z|\left(|z|-1\right)\left(|z|+1\right)=0\Rightarrow|z|=1\ ou\ |z|=0$. On écarte la solution évidente $z = 0$, ainsi $|z|=1\Leftrightarrow\overline{z}=\frac{1}{z}$ et l'équation de départ devient $z^4=1\Leftrightarrow z\in\{i,-i,-1,1\}$.En résumé l'ensemble des solutions est $\{0,i,-i,-1,1\}$.

On peut aussi s'inspirer de la méthode de résolution de $z^n=a$. Si on pose $z=\rho e^{i\theta}$ (avec $\rho\neq0$ car on écarte la solution évidente où z = 0) alors $z^3=\overline{z}\Rightarrow\rho^3e^{3i\theta}=\rho e^{-i\theta}\Leftrightarrow\rho^2e^{4i\theta}=1\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=1\\4\theta\equiv0[2\pi]\end{cases}$ on termine ensuite facilement.

5. Soit $Z=\frac{a+b}{1+ab}$ alors $\overline{Z}=\frac{\overline{a}+\overline{b}}{1+\overline{a}\,\overline{b}}$, mais $|a|=1\Leftrightarrow\overline{a}=\frac{1}{a}$ donc $\overline{Z}=\frac{\overline{a}+\overline{b}}{1+\overline{a}\,\overline{b}}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{ab}}=\frac{a+b}{1+ab}=Z$.

Autre méthode : on a $a=e^{i\alpha},b=e^{i\beta}$ alors $\frac{a+b}{1+ab}=\frac{cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\in\mathbb{R}$.

La condition $ab\neq-1$ assure que $e^{i(\alpha+\beta)}\neq-1\Leftrightarrow\alpha+\beta\neq\pi\left(2\pi\right)\Leftrightarrow cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\neq0$.