Revision - 2.

Lycée pilote de bizerte	COMPLEXES	CLASSE :	Prof : M.Ben Ali

EXERCICE N°1:

On considère , dans l'ensemble $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls , l'équation (E) :

$z^3 = \left(-2-2i\sqrt{3}\right)\bar{z}$.

1. Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $u = -2-2i\sqrt{3}$.
2. On pose $z = re^{i\alpha}$ où r est un réel strictement positif et α un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$.
   a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $r^2e^{i4\alpha} = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
   b) En déduire que l'équation (E) admet, dans $\mathbb{C}^*$, quatre solutions que l'on donnera sous forme exponentielle.
3. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note A , B , C et D les images des solutions de (E) d'arguments respectifs α_A , α_B , α_C et α_D vérifient $\alpha_A < \alpha_B < \alpha_C < \alpha_D$.
   a) Placer les points A, B , C et D. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
   b) Soit E le milieu du segment [AD] Ecrire l'affixe z_E de E sous forme exponentielle et sous forme algébrique
   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE N°2:

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (d'unité graphique 2cm).

On considère les points E et F d'affixes respectives $z_E = 1+i$ et $z_F = \frac{1-i}{2}$.

1. Ecrire z_E et z_F sous forme exponentielle.
2. Montrer que pour tout θ de $[0,\pi[$, le point M d'affixe $z = e^{2i\theta}$ appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.
3. Montrer que pour tout M de (Γ), $EM \times FM = \left|e^{4i\theta} + 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)e^{2i\theta}\right|$
4. a) Montrer que pour tout θ de $[0,\pi[$, $e^{4i\theta} + 1 = 2\cos 2\theta . e^{i2\theta}$.
   b) En déduire que $EM \times FM = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2}$
5. a) Montrer que pour tout réel θ de $[0,\pi[$, $\frac{1}{4} \le \frac{1}{4} + \left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{25}{2}$.
   b) Déterminer l'affixe z_0 du point M_0 correspondant à la valeur maximale de $EM \times FM$

   Placer le point M_0

Prof :M.Ben Ali

EXERCICE N°3:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E_\theta\right)$: $z^2-\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)z+1=0$, où θ est un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1. a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\left(E_\theta\right)$.

   On mettra les solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle où z_1 est celle dont la partie imaginaire est négative .

   b) On désigne par M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et $z_3=i$.

   Déterminer la valeur de θ pour laquelle $OM_1M_2M_3$ soit un parallélogramme.

   c) Faire une figure pour $\theta=\frac{\pi}{6}$.

Dans tout ce qui suit , on prend : $\theta=\frac{\pi}{6}$.

2. Soit t la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\left(-\sqrt{3}+i\right)$.

   Calculer l'affixe z_4 du point $M_4=t\left(M_1\right)$ puis placer le point M_4 .

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

   Calculer l'affixe z_5 du point $M_5=r\left(M_1\right)$ puis placer le point M_5 .

4. On désigne par z_6 l'affixe du point M_6 le symétrique de M_3 par rapport à O.

   Montrer que les racines sixièmes de (-1) sont z_k , avec $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

5. Ecrire le polynôme z^6+1 sous forme de produit de trois polynômes de second degré à coefficients réels.

EXERCICE N°4:

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3-\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)z^2-z+\sqrt{2}-i\sqrt{2}=0$.

a) Vérifier que 1 et -1 sont solutions de l'équation (E) .

b) Résoudre alors l'équation (E) .

2. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit C le point d'affixe $z_C=\sqrt{2}-\sqrt{2}i+2e^{i\frac{\pi}{3}}$

a) Placer les points A et B d'affixes respective $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ et $2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Placer alors le point C et en déduire un argument de z_C.

3. Soient I et J les points d'affixes respectives 1 et -1.

   A tout point M d'affixe $z\left(z\neq 1\right)$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\frac{z-1}{\overline{z}-1}$

   a) Montrer que le point M' appartient au cercle trigonométrique.

   b) Montrer que $\frac{z'+1}{z-1}$ est réel. Interpréter géométriquement le résultat.

   c) En déduire une construction du point C'

Prof:M. Ben ali

Revision Complexe - 2

Ex 1

(E) : $z^3 = (-2-2i\sqrt{3}).\overline{z}$; $z \in \mathbb{C}^*$.

1) $u = -2-2i\sqrt{3}$

$= 4\left(\frac{-1}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$= 4\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$

$= 4.e^{-2i\pi/3}$

2) On pose $z = r.e^{i\theta}$; $r > 0$.
$\theta \in [0, 2\pi[$.

a/ (E) : $z^3 = (-2-2i\sqrt{3})\overline{z}$

ssi $(re^{i\theta})^3 = 4e^{-i2\pi/3}.(r.e^{-i\theta})$

ssi $\frac{r^3.e^{i3\theta}}{r.e^{-i\theta}} = 4.e^{i4\pi/3}$ $(r \neq 0)$.

ssi $r^2.e^{i4\theta} = 4e^{i4\pi/3}$.

b/ (E) $\Leftrightarrow r^2.e^{i4\theta} = 4e^{i4\pi/3}$

Par identification :

$\begin{cases} r^2 = 4 \\ e^{i4\theta} = e^{i4\pi/3} \end{cases}$

ssi $\begin{cases} r^2 = 4 \\ 4\theta \equiv \frac{4\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

ssi $\begin{cases} r = 2 \quad (r > 0) \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{4} ; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

or $\theta \in [0, 2\pi[$.

D'où les valeurs possibles de θ sont :

$\theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

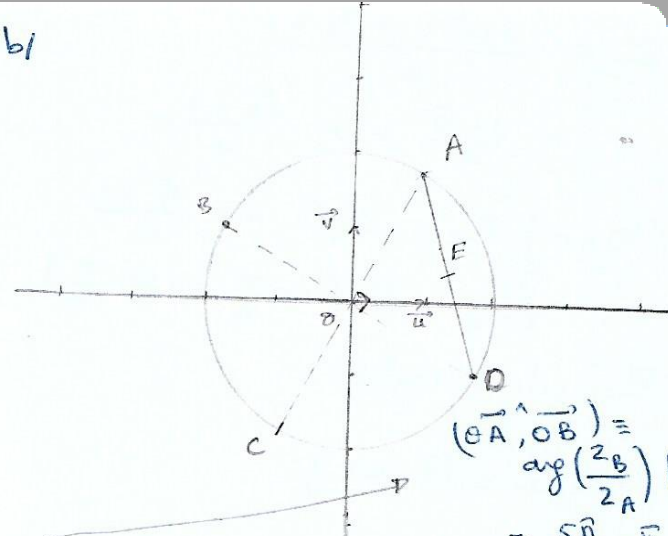
$z \in \left\{2e^{i\pi/3} ; 2e^{i5\pi/6} ; 2.e^{i4\pi/3} ; 2e^{i\frac{11\pi}{6}}\right\}$.

3) On pose ~~$A(z_A = \frac{\pi}{3})$~~

$A(2e^{i\pi/3})$; $B(2e^{i5\pi/6})$; $C(2e^{i4\pi/3})$

$D(2e^{i\frac{11\pi}{6}})$

b/



$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$

$\equiv \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$

$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

ABCD est un carré.

Donc $(OA) \perp (OB)$

$z_A - z_C = \dots = 0$. sig $A = S_O(C)$

sig $A * C = O$

$z_B - z_D = \dots = 0$ sig $B * D = O$.

Le quadrilatère ABCD est tq/: $OA = \dots$

donc c'est un # inscrit dans le cercle.

D'où ABCD est un rectangle.

Comme $(AC) \perp (BD)$; ABCD est un carré.

b/ On a $z_A = 2e^{i\pi/3}$; $z_D = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$

$E = A * D$.

donc $z_E = (z_A + z_D) \times \frac{1}{2}$

$= e^{i\pi/3} + e^{i11\pi/6}$

$= e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{11\pi}{12}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{11\pi}{12}\right)} + e^{\dots}\right)$

$= -e^{i\pi/12}\left(2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= +2.\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/12}$

$= \sqrt{2} e^{i\pi/12}$

Or $z_A = 2e^{i\pi/3}$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1 + \sqrt{3}.i$

$z_D = 2.e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$= 2\left(\cos\left(+\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i.\frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3} - i$.

$$Z_E = \frac{1+\sqrt{3}\,i + \sqrt{3} - i}{2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

c/ On a $\begin{cases} Z_E = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ Z_E = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$

Par identification:

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} \end{cases}$$

ssi $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Ex 2

$E\left(Z_E = 1+i\right)$ et $F\left(Z_F = \frac{1-i}{2}\right)$.

1) On a $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$$Z_E = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$Z_E = \sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}$$

$$Z_F = \frac{1-i}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-i\pi/4}.$$

2) pour tout $\theta \in [0,\pi[$,
$M\left(z = e^{2i\theta}\right)$

On a $OM = |z|$
$= 1$

donc $M \in \mathcal{C}_{(0,1)}$
ssi $M \in (\Gamma)$

Comme $\theta \in [0,\pi[$
alors $2\theta \in [0,2\pi[$.
D'où M décrit ...

3) pour tout $M(z) \in (\Gamma)$, On a:

$$EM \times FM = |z - z_E| \cdot |z - z_F|$$
$$= \left|e^{2i\theta} - 1 - i\right| \times \left|e^{2i\theta} - \frac{1-i}{2}\right|.$$
$$= \left|e^{4i\theta} - \frac{1-i}{2}\cdot e^{2i\theta} - e^{2i\theta} + \frac{1-i}{2} - ie^{2i\theta} ...\right.$$
$$= \left|e^{4i\theta} - e^{2i\theta}\left(\frac{1-i}{2} + 1 + i\right) + \left(\frac{1-i}{2}\right)(1+ ...\right.$$
$$= \left|e^{4i\theta} - e^{2i\theta}\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right) + 1\right|.$$

4) a/ pour tout $\theta \in [0,\pi[$, On a

$$e^{4i\theta} + 1 = e^{2i\theta}\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right)$$
$$= e^{2i\theta}\cdot 2\cos 2\theta$$
$$= 2(\cos 2\theta) \times e^{2i\theta}$$

b/ $EM \times FM = \left|e^{4i\theta} + 1 - e^{2i\theta}\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)\right|$

$$= \left|2\cos 2\theta \cdot e^{2i\theta} - e^{2i\theta}\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)\right|$$
$$= \left|e^{2i\theta}\right| \cdot \left|\left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}i\right|$$
$$= 1 \times \sqrt{\left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2}$$

5) a/ pour tout $\theta \in [0,\pi[$.
On a $2\theta \in [0,2\pi[$

Donc $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$

$$-2 - \frac{3}{2} \leq 2\cos 2\theta - \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{3}{2}$$
$$-\frac{7}{2} \leq \left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \leq ...$$

donc $0 \leq \left|2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{7}{2}$.

$$0 \leq \left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{49}{4}$$
$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{49}{4} + ...$$
$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{2}$$

b/ $M_0(z_0)$ correspond à la valeur maximale de $EM \times FM$.

On a ~~la valeur~~

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \left(2\cos 2\theta - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq EM^2 \times FM^2 \leq \frac{25}{2}$$

Donc la valeur maximale de $EM \times FM$ est égale à $\sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

pour θ_0 tel que :

$$\frac{1}{4} + \left(2\cos 2\theta_0 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

D'où $\left(2\cos 2\theta_0 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$.

$2\cos 2\theta_0 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ ou $2\cos 2\theta_0 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$.

$2\cos 2\theta_0 = 5$ ou $2\cos 2\theta_0 = -2$

$\cos 2\theta_0 = \frac{5}{2} > 1$ $\cos 2\theta_0 = -1$.

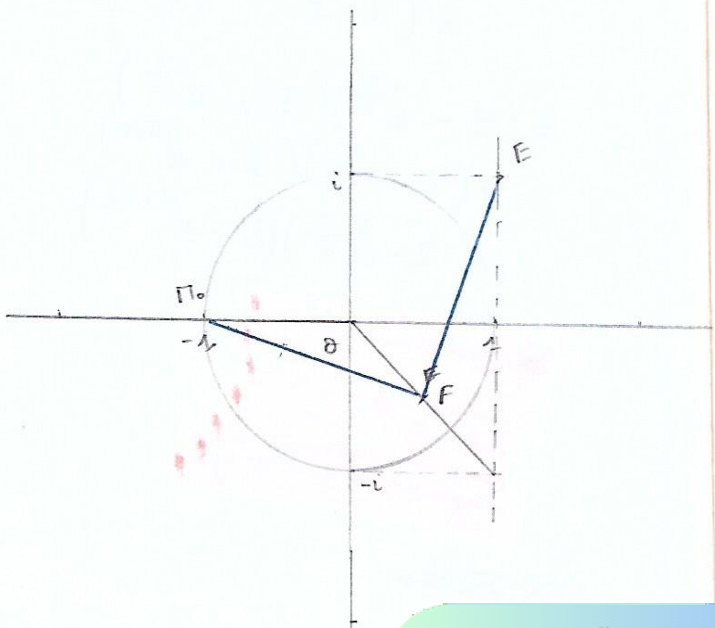
Impossible. $2\theta_0 = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\theta_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

or $\theta_0 \in [0, \pi[$.

donc $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

$M_0\left(z = e^{2i\frac{\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1\right)$.



Ex 3 $z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) z + (e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}) = 0$.

(E_θ) : $z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) z + 1 = 0$; $\theta \in]0$

1) a/ On a $\Delta = +(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 - 4$

$= (2\cos\theta)^2 - 4$

$= 4(\cos^2\theta - 1)$

$= -4\sin^2\theta$.

$= (2i\sin\theta)^2$.

Les solutions

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta} \end{cases}$$

Une racine carrée de Δ est $\delta = 2i\sin\theta$.

Les solutions de cette équations sont :

$z' = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2i\sin\theta}{2}$; $z'' = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta} + \dots}{2}$

$= \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2}$; $z'' = \frac{2\cos\theta + 2i\dots}{2}$

$= \cos\theta - i\sin\theta$; $z'' = \cos\theta + i\sin\theta$.

Comme $\operatorname{Im}(z') = -\sin\theta < 0$ car $\theta \in]\dots$

alors $z_1 = z'$; $z_2 = \cos\theta \dots$

$= \cos\theta - i\sin\theta$ $= e^{i\theta}$.

$= e^{-i\theta}$

$S_{\mathbb{C}} = \{ e^{-\theta i}, e^{i\theta} \}$.

b/ $OM_1M_2M_3$ est un parallélogramme

ssi : $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_3M_2}$

$z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{\overrightarrow{M_3M_2}}$

$z_1 - 0 = z_2 - z_3$

$e^{-i\theta} = -i + e^{+i\theta}$

$e^{-i\theta} - e^{i\theta} = i$

$-2\cancel{i}\sin(-\theta) = \cancel{i}$

$2 \cdot \sin\theta = 1$

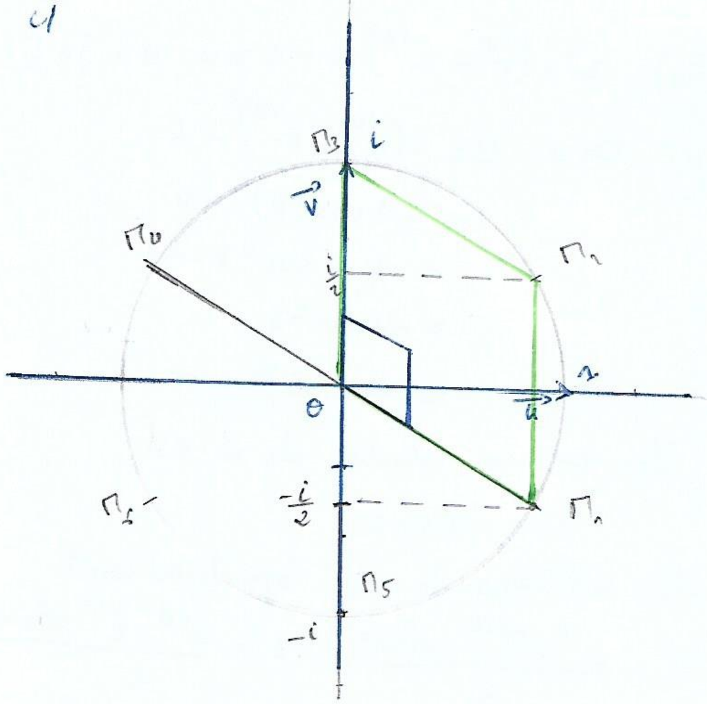
$\sin\theta = \frac{1}{2}$.

$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

or $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Donc $\theta = \frac{\pi}{6}$.

1)



2) $t = t_{\vec w(-\sqrt3+i)}$

On a $M_4 = t(M_1)$

ssi $\overrightarrow{M_1M_4} = \vec w$

$z_4 - z_1 = z_{\vec w}$

$z_4 = -\sqrt3 + i + e^{-i\pi/6}$

$= -\sqrt3 + \cos\frac{\pi}{6} + i - i.\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{i\sqrt3}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{5i\pi}{6}}$

3) $r = R_{(O, -\frac{2\pi}{3})}$

Donc $r : P \longrightarrow P$

$M(z) \longmapsto M'(z')$ où $z' = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z + (1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}) \times 0$

D'où $M_5 = r(M_1)$

$z_5 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \times e^{i\pi/6}$

$= e^{-i\ldots}$

4) On a $M_6(z_6) = S_O(M_2(z_2))$

donc $z_6 = -z_2$

$z_6 = -e^{i\pi/6}$

$z_6 = e^{-5i\pi/6}$

$(z_1)^6 = (e^{-i\pi/6})^6 = -1$

$z_2^6 = (e^{i\pi/6})^6 = -1$

$(z_3)^6 = (e^{i\pi/2})^6 = -1$

$(z_4)^6 = (e^{5i\pi/6})^6 = -1$

$z_6^6 = (e^{-5i\pi/6})^6 = -1$

$(z_5)^6 = (e^{-i\pi/2})^6 = -1$

$z_k = \sqrt[6]{|-1|} \times e^{\frac{\pi+2k\pi}{6}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

D'où ce sont les racines sixièmes de (-1)

Il faut mettre tous les à puissance 6 $\to -1$.

Donc ce sont des soluti…

5) On a z_k solution 6ème de -1

ssi $z_k^6 = -1$

ssi $z_k^6 + 1 = 0$.

D'où $z^6 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)$

$= (z - e^{i\pi/6}) \times (z - e^{-\frac{5i\pi}{6}}) \times (z - e^{i\pi/2}) \times (z - e^{-i\pi/2}) \times (z - e^{-i\pi/6})(z - e^{\frac{i5\pi}{6}})$

$= (z - e^{\frac{i\pi}{6}})(z + e^{\frac{i\pi}{6}}) \times (z - e^{\frac{i\pi}{2}})(z + e^{i\pi/2}) \times (z - e^{\frac{5i\pi}{6}})(z + e^{5i\pi/6})$

$= (z^2 - e^{i\pi/3}) \times (z^2 - e^{i\pi}) \times (z^2 - e^{\frac{5i\pi}{3}})$

$\ldots \sqrt3 . z + 1)(z + \sqrt3 \ldots$

Ex 4

1) (E) : $z^3 - (\sqrt{2} - i\sqrt{2})z^2 - z + \sqrt{2}(1-i) = 0$

a/ On a $\cancel{1} - \sqrt{2}(1-i)\times 1 - \cancel{1} + \sqrt{2}(1-i)$

$= 0.$

donc $z = 1$ est une solution de (E)

et : $-1 - (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \times 1 + 1 + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 0$

$= 0.$

Donc (-1) est une solution de (E).

b/ (E) : $z^3 - \sqrt{2}(1-i)z^2 - z + \sqrt{2}(1-i) = 0$

Faut utiliser $\widehat{1}$ et $\widehat{-1}$ solutions

$z^2(z - \sqrt{2}(1-i)) - (z - \sqrt{2}(1-i)) = 0$

$(z^2-1)(z - \sqrt{2}(1-i)) = 0$

$(z-1)(z+1)(z - \sqrt{2}(1-i)) = 0$

$S_{\mathbb{C}} = \{1, -1, \sqrt{2}(1-i)\}.$

2) $C(z_C = \sqrt{2}(1-i) + 2e^{i\frac{\pi}{3}})$.

a/ $A(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$.

On a $z_A = \sqrt{2}(1-i)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2 . e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

$B(2.e^{i\pi/3})$.

donc $z_B = 2.\cos\frac{\pi}{3} + (i\sin\frac{\pi}{3})\times 2$

$= 2 \times \frac{1}{2} + 2i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 1 + \sqrt{3}i.$

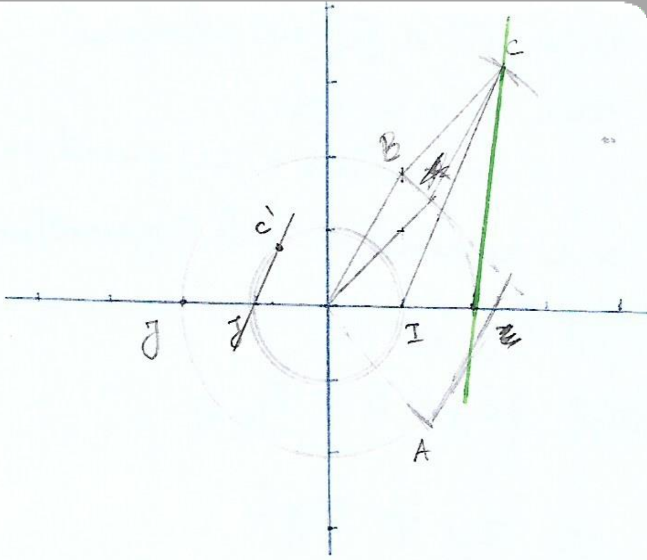
b/ Comme $z_C = z_A + z_B$

donc $aff(\vec{OC}) = aff(\vec{OA} + \vec{OB})$

alors $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OA}$.

D'où OACB est un parallélogramme

Or $OA = OB$



Par suite : $\frac{1}{2}$

losange

$(\widehat{\vec{u},\vec{OC}}) \equiv \frac{1}{2}\left((\widehat{\vec{u},\vec{OB}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{OA}})\right) [2\pi]$

$\arg(z_C) \equiv \frac{1}{2}(\arg(z_B) + \arg(z_A)) [2\pi]$

$\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right).$

$[2\pi] \equiv \frac{\pi}{24} [2\pi]$

3) $I(1)$ et $J(-1)$.

$M(z \neq 1) \longmapsto M'\left(z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}\right)$.

avec $M \in P$.

a/ On a $|z'| = \left|\frac{z-1}{\bar{z}-1}\right|$

$= \frac{|z-1|}{|\bar{z}-1|}$

$= 1.$

b/ $\frac{z'+1}{z-1} = \frac{\frac{z-1}{\bar{z}-1} + 1}{z-1}$

$= \frac{z-1+\bar{z}-1}{(z-1)(\bar{z}-1)}$

$= \frac{2.Re(z) - 2}{|z-1|^2}$

$= \frac{2Re(z) - 2}{|z-1|^2} \in \mathbb{R}.$

Les vecteurs $\vec{JM'}$ et $\vec{I}$...

c/ On a $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{JC'}$ sont colinéaires.

Donc $C' \in \Delta$ avec

Δ la parallèle à (IC) passant par J.

or C' appartient au cercle trigonométrique $\mathcal{C}_{(O,1)}$.

D'où $\{C'\} \in \Delta \cap \mathcal{C}_{(O,1)}$.

Or $z_{C'} \neq z_J$ (On fait le calcul)

d'où la construction de C'.

Autre méth :

$z' = z_J \quad (z = x+iy)$

$\Rightarrow x = 1.$

Comme $Re(z_C) \neq 1.$

alors $C' \neq J$

D'où la construction de C