Lycée pilote de Bizerte — ***Serie d'exercices n :1*** — **Prof:M.Ben Ali**

4eme Math

Exercice – 1 – :

1)a) *Donner* l'écriture algébrique du nombre complexe $Z=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$.

b)Soit a et b deux nombres complexes non nuls ayant le meme module.

Montrer que le nombre complexe $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ est réel.

2)a) *Soit* z un nombre complexe non nul, montrer que $\frac{2z-1}{z^2}$ est réel si et seulement si : $z=\bar{z}$ ou $z+\bar{z}=2z\bar{z}$.

b)En déduire l'ensemble E des points M(z) tels que $\frac{2z-1}{z^2}\in$ IR.

Exercice – 2 – :

Le plan complexe est rapporté à un repére orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. *Soit ABC* un triangle tel que O est le centre de son cercle circonscrit.

On désigne par a, b et c *les affixes respectives* des points A,B et C. Soit H le point d'affixe h=a+b+c.

1) a) *Montrer que* $|a|=|b|=|c|$.

b)Soit $d=\bar{b}c-b\bar{c}$, montrer que d est un nombre imaginaire.

c)En déduire que le nombre complexe $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})$ est imaginaire.

d)Montrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.

e)En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

2) *Soit D, F* et K les points d'affixes respectives 5i , 3+4i et 3-4i.

Déterminer l'affixe de l'orthocentre du triangle DFK.

Exercice – 3 – :

Le plan complexe est muni du R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$. *On considére l'application f du* plan dans lui meme *qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe* $z'=z^2+iz$. *On* désigne par *A le* point d'affixe $\frac{i}{2}$.

1) *Déterminer l'ensemble* des points invariants par f.

2) a) *Déterminer l'affixe du point B image de A par f*.

b) *Montrer que pour tout points M de* $P\setminus\{A\}$, $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})\equiv 2(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}})[2\pi]$.

c) *En deduire l'ensemble* Γ *des points M pour lesquels* $M'\in[B,\vec{u})$.

3) *On pose* $z=x+iy$ *et* $z'=x'+iy'$ *ou* x,y,x' *et* y' *sont quatre réels*.

a) *Exprimer* x' *et* y' *en fonction de* x *et* y.

b) *Tracer, dans le plan la parabole P d'équation* $y=x^2+\frac{1}{4}$ *et la droite* $\Delta : y=x$.

c) *Donner à l'aide de P et* Δ *une construction géomètrique du point M' image d'un point M de la droite* $D(A,\vec{u})$.

Exercice – 4 – :

Le plan complexe est muni du R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit *f l'application de* P-{O} vers P *qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe* $z'=\bar{z}+\frac{z^2}{\bar{z}}$.

1) *Montrer* que les points O,M et M' ...

2)a)Déterminer l'ensembl...

b) *Déterminer l'ensem*...

3) *Soit* M un point de $P-\{O\}$ n'appartenant ni à E_1 ni à E_2. *On* note I le milieu du segment $[OM']$ et N le symétrique de M par rapport à l'axe $(O,\vec{u})$.

a)Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux.

b)Trouver une construction géomètrique de M' à l'aide de M.

Exercice – 5 –:

Le plan complexe est muni du R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit $z \in C^*$;On considére les points A,B, M,M_1 *et* M_2 *d'affixes* respectives 1,2 ,z , z^2 et 2z .

1)Montrer que les points O,M_1 *et* M_2 sont alignés si et seulement si z est réel.

2)On suppose dans la suite de l'exercice que z n'est pas réel et on désigne par M' le point d'affixe $z'=2z-z^2$.

a)Vérifier que le quadrilatére $OM'M_2M_1$ est un parallélogramme.

b)Déterminer alors l'ensemble des points M(z) tels que $OM'M_2M_1$ est un losange.

3)Dans cette question M est un point du cercle trigonométrique ζ. Soit T la tangente à ζ en M.

a)Montrer que AM=MM' et que $\dfrac{z'-1}{z}$ est réel.

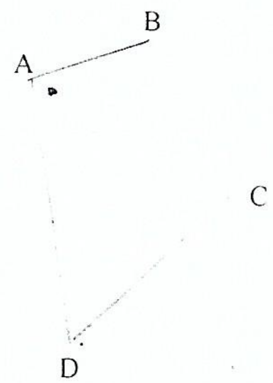
b)En déduire que M'est le symétrique du point A par rapport à T.

Exercice – 6 –:

Le plan complexe est muni du R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans la figure ci-contre ABCD est quadrilatére convexe.

Extérieurement au quadrilatére ABCD ,on construit les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 tels que AM_1B ,BM_2C ,CM_3D et DM_4A soient des triangles réctangles et isocèles de sommets principaux réspectifs M_1 ,M_2 ,M_3 et M_4.



On désigne par a ,b , c et d les affixes respectives des points A,B ,C et D .

z_1 , z_2, z_3 et z_4 les affixes respectives des points M_1 ,M_2 ,M_3 et M_4.

1)*a)Montrer* que $\dfrac{b-z_1}{a-z_1}=i$, en déduire z_1 *en* fonction de a et b .

b)Ecrire z_2, z_3 et z_4 en fonction de a , b , c et d .

2)Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_2M_4}$ sont orthogonaux et ont la meme norme.

** Prof:M.BenAli **

Correction Série 1

Ex 1/

1)a/ $Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} + \dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{3+1} + \dfrac{(\sqrt{3}+i)(1-i\sqrt{3})}{3+1}$

$= \dfrac{\sqrt{3} - \cancel{i} + \cancel{3i} - i^2\sqrt{3} + \sqrt{3} - \cancel{3i} + \cancel{i} - i^2\sqrt{3}}{4}$

$= \sqrt{3}$

b/ On a Z réel :

$\begin{cases} Im(Z) = 0 \\ Z = \overline{Z} \\ Arg(Z) \equiv 0\ [\pi] \end{cases}$

On a $\overline{\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)} = \dfrac{\overline{a}}{\overline{b}} + \dfrac{\overline{b}}{\overline{a}}$

$= \dfrac{\overline{a}.ab}{\overline{b}.ab} + \dfrac{\overline{b}.ba}{\overline{a}.ab}$

$= \dfrac{|a|^2.b}{|b|^2.a} + \dfrac{|b|^2.a}{|a|^2.b}$

or $|a| = |b|$

d'où $\overline{\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}$

alors $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ est un réel.

2) a/ $\dfrac{2Z-1}{Z^2} \in \mathbb{R}$ ssi $\overline{\left(\dfrac{2Z-1}{Z^2}\right)} = \dfrac{2Z-1}{Z^2}$

sig $\dfrac{2\overline{Z}-1}{\overline{Z}^2} = \dfrac{2Z-1}{Z^2}$

$\Leftrightarrow Z^2(2\overline{Z}-1) = \overline{Z}^2(2Z-1)$

$\Leftrightarrow 2\overline{Z}.Z^2 - Z^2 - 2Z.\overline{Z}^2 + \overline{Z}^2 = 0$

sig $2.Z.\overline{Z}(Z - \overline{Z}) - (Z - \overline{Z})(Z + \overline{Z})$

sig $(Z - \overline{Z})(2Z.\overline{Z} - (Z + \overline{Z})) = 0$.

sig $Z = \overline{Z}$ ou $2Z.\overline{Z} = Z + \overline{Z}$.

b/

$E = \left\{ Z \in \mathbb{C}^* \ / \ \dfrac{2Z-1}{Z^2} \in \mathbb{R} \right\}$

ainsi $Z = \overline{Z}$ ou $2\,Z.\overline{Z} = Z + Z$

sig $Z \in \mathbb{R}^*$ ou $\cancel{2}|Z|^2 = \cancel{2}Re(Z)$

On pose $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $Z = x + \dots$

$x^2 + y^2 = x$

sig $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

sig $Z \in \mathcal{C}\left(A\left(\frac{1}{2}, 0\right), \frac{1}{2}\right)$

avec $O(0)$

Ainsi $E = \left[(O, \vec{u}) \cup \mathcal{C}\right] \setminus \{O\}$

Ex 2/

1)a/ $OA = OB = OC$

sig $|a| = |b| = |c|$

b/ Z imaginaire :

$\begin{cases} Re(Z) = 0 \\ Z = -\overline{Z} \\ Arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$

$\overline{d} = \overline{\overline{b}.c - b.\overline{c}}$

$= b.\overline{c} - \overline{b}.c$

$= -d$

alors $d \in i\mathbb{R}$.

c/ $(b+c)(\overline{b}-\overline{c}) = b\overline{b} - c\overline{c} + d$

(car $|b|=|c|$) $= |b|^2 - |c|^2 + d$

$= d \in i\mathbb{R}$.

d/ On a $\dfrac{h-a}{b-c} = \dfrac{(b+c)(\overline{b-c})}{(b-c)(\overline{b-c})}$

$= \dfrac{(b+c)(\overline{b}-\overline{c})}{|b-c|^2}$

or $\left.\begin{array}{l} |b-c|^2 \in \mathbb{R} \\ (b+c)(\overline{b}-\overline{c}) \in i\mathbb{R} \end{array}\right\} \dfrac{h-a}{b-c} \in i\mathbb{R}$

ainsi $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CB}$ (1)

e) Soit $d' = \overline{c}a - c\overline{a}$

$\overline{d'} = c\overline{a} - \overline{c}a$

$= -d'$

donc $d' \in i\mathbb{R}$.

ainsi $(c+a)(\overline{c}-\overline{a}) = d' \in i\mathbb{R}$.

D'où $\dfrac{h-b}{c-a} = \dfrac{(c+a)(\overline{c}-\overline{a})}{|c-a|^2} \in i\mathbb{R}$.

Donc $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ (2)

D'après (1) et (2), H est l'orthocentre de ABC.

2) On a : $|5i| = |3+4i| = |3-4i| = 5$

ainsi O est le centre circonscrit du DFK.

d'où $h' = 5i + 3 + \cancel{4i} + 3 - \cancel{4i}$

$= 6 + 5i$

est l'affixe de l'orthocentre de DFK.

Ex 3

1) Il faut que $z = z^2 + iz$

sig $z^2 + iz - z = 0$

sig $z(z + i - 1) = 0$

sig $z = 0$ ou $z = 1 - i$

ainsi $E : \{ M(z) \in P$ avec $M = M'$

$E = \{ M_1(1-i) \; ; O \}$

2) a/ $z_B = \left(\frac{-i}{2}\right)^2 + i \cdot \left(\frac{-i}{2}\right)$

$= \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

b/ $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{BM'}}) \equiv \arg\left(z^2 + iz - \frac{1}{4}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(z^2 + iz + \frac{i^2}{4}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\left(z - \frac{i}{2}\right)^2\right) [2\pi]$

$\equiv 2 \cdot \arg(z - z_A) [2\pi]$

$\equiv 2 (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) [2\pi]$; $M \in P \setminus \{A\}$

c) $M' \in [B, \vec{u})$ ssi $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{BM'}}) \equiv 0 [2\pi]$

ssi $2(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM}}) \equiv 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

ssi $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM}}) \equiv k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

ssi $M = (A, \vec{u})$

3) a/ $z' = z^2 + iz$

sig $x' + iy' = x^2 - y^2 + 2ixy + xi - y$

Par identificat° :

$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - y \\ y' = 2xy + x \end{cases}$

c/ $M \in D(A, \vec{u})$ sig $y = \frac{-1}{2}$

$\ldots^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = x^2 + \ldots$

Ex 4

1) On a: $\frac{Z_{M'} - Z_O}{Z_M - Z_O} = \frac{\overline{z}^2 + z^2}{\overline{z}.z}$

sig $= \frac{(\overline{z}+z)^2 - 2.z\overline{z}}{\overline{z}.z}$

sig $= \frac{(2Re(z))^2 - 2|z|^2}{|z|^2} \in \mathbb{R}$.

sig $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ colinéaires.

sig O, M, M' alignés.

2) $E_1 : \{ M' \in P\setminus\{O\} / M' = O \}$

$M \in E_1$ sig $Z(M') = 0$

sig $z' = 0$

sig $\frac{(\overline{z}+z)^2 - 2|z|^2}{\overline{z}} = 0$

~~alors $(2Re(z))^2 = 2|z|^2$~~

~~sig $2Re(z) = 2|z|$ ou~~

On pose $x + iy = z$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

sig $(2x)^2 - 2(x^2+y^2) = 0$

sig $x^2 + y^2 - 2x^2 = 0$

sig $y^2 = x^2$

sig $y = x$ ou $y = -x$; $z \neq 0$

alors $E_1 = (\Delta_1 \cup \Delta_2) \setminus \{O\}$

avec $\begin{cases} \Delta_1 : y = x \\ \Delta_2 : y = -x \end{cases}$

b) $E_2 = \{ M \in P\setminus\{O\} / M' = M \}$

$M \in E_2$ sig $z = z'$

sig $z.\overline{z} = (\overline{z}+z)^2 - 2z\overline{z}$

sig $(z+\overline{z})^2 = 3.|z|^2$

sig $4x^2 = 3(x^2+y^2)$

sig $x^2 = 3y^2$

sig $x = \sqrt{3}.y$ ou $x = -\sqrt{3}.y$.

Soit $\Delta_3 : y = \frac{x}{\sqrt{3}}$; $\Delta_4 : y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$

$E_2 = (\Delta_3 \cup \Delta_4) \setminus \{O\}$

3) a) On a: $Z_I = \frac{z'}{2}$

$Z_N = \overline{z}$

$\frac{Z_N - Z_I}{Z_M - Z_O} = \frac{\overline{z} - \frac{z'}{2}}{z}$

sig $= \frac{\frac{\overline{z}^2 - z^2}{\overline{z}}}{z}$

$= \frac{(\overline{z}+z)(\overline{z}-z)}{z.\overline{z}}$ sig

$= \frac{2x . 2iy}{|z|^2}$

$= 4.i.\frac{xy}{|z|^2} \in i\mathbb{R}$.

alors $\overrightarrow{IN} \perp \overrightarrow{OM}$

b)